Rango numérico

Sea H un espacio de Hilbert. Denotemos con $\mathcal{B}(H)$ el conjunto de todos operadores lineales acotados que actuan en H.

Definición (rango numérico). Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. El *rango numérico* de A es el conjunto

$$W(A) := \{\langle Ax, x\rangle \colon x \in H,\ \|x\| = 1\} = \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \colon x \in H \setminus \{0\} \right\}.$$

En otras palabras, $W(A)$ es el rango del cociente de Rayleigh de A.

1. Para cualquier $A \in \mathcal{B}(H)$, el conjunto $W(A)$ es acotado.

2. Lema. Sean $A \in \mathcal{B}(H)$, $f, g \in H$, $\|f\| = \|g\| = 1$, $\langle Af, f\rangle = 1$, $\langle Ag, g\rangle = 0$ y $\langle Af, g\rangle \in \mathbb{R}$. Entonces $[0, 1] \subset W(A)$.

3. Teorema de Hausdorff–Toeplitz. Para cualquier $A \in \mathcal{B}(H)$, el conjunto $W(A)$ es convexo.

4. Calcular $W(A)$ para el operadores del desplazamiento en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.

5. Encontrar un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que el conjunto $W(A)$ no es cerrado.

6. Teorema (espectro y rango numérico). Para todo $A \in \mathcal{B}(H)$, $\operatorname{sp}(A) \subset \operatorname{clos}(W(A))$.

7. Calcular $\operatorname{sp}(A)$ y $W(A)$ para la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Definición (operador convexoidal). El operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es *operador convexoidal* (convexoid operator) si $\operatorname{clos}(W(A)) = \operatorname{conv}(\operatorname{sp}(A))$.

8. Cada operador normal es convexoidal:

$$AA^* = A^*A \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{clos}(W(A)) = \operatorname{conv}(\operatorname{sp}(A)).$$

9. Calcular $\operatorname{sp}(A)$ y $W(A)$ para la matriz $A = \operatorname{diag}(2, -1, i)$.

10. Calcular $\operatorname{sp}(A)$ y $W(A)$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$