Redes y topología débil

El concepto de *sucesiones* es una herramienta muy importante y cómoda para trabajar con la topología en los espacios métricos. En los espacios topológicos generales, las *redes* hacen un papel similar.

Definición (conjunto dirigido). Un *conjunto dirigido* es un par $(X, \succ)$ donde X es un conjunto y $\succ$ una relación binaria transitiva sobre X, que cumple la siguiente propiedad especial:

$$\forall x, y \in X \quad \exists z \in X \quad z \succ x \ \wedge \ z \succ y.$$

En lugar de $y \succ x$ (y *sucede a* x) se escribe también $x \prec y$ (x *precede a* y).

1. Sean $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico y x un punto de X. Denotemos con $\mathfrak{T}_x$ el conjunto de todas las vecindades abiertas de x:

$$\mathfrak{T}_x := \{U \in \mathfrak{T} \colon x \in U\}.$$

Entonces $(\mathfrak{T}_x, \subset)$ es un conjunto dirigido (U_1 sucede a U_2 si $U_1 \subset U_2$).

2. En la situación del ejercicio anterior, definamos un conjunto P y una relación $\succ$ mediante a las siguientes fórmulas:

$$P := \{(U, y) \colon U \in \mathfrak{T}_x,\ y \in U\};$$
$$(U_1, y_1) \succ (U_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \subset U_2.$$

Entonces $(P, \succ)$ es un conjunto dirigido.

Definición (red). Una *red* es un par $(r, \succ)$ donde r es una aplicación y $\succ$ es una relación que dirige el dominio de definición de r. Si $r \colon A \to X$ entonces en lugar de $(r, \succ)$ escriben también $(r_\alpha, \alpha \in A, \succ)$ y dicen que $(r, \succ)$ es una *red en* X.

Definición (límite de red). Sean X un espacio topológico, $(r, \succ) = (r_\alpha, \alpha \in A, \succ)$ una red en X y x un punto en X. Se dice que x es un *límite de la red* $(r, \succ)$ y se escribe $(r, \succ) \to x$ si para cualquiera vecindad U de x existe un elemento $\alpha \in A$ tal que $r_\beta \in U$ para todos $\beta \succ \alpha$.

Obviamente una sucesión es una red, cuyo conjunto de indices es el conjunto $\mathbb{N}$ dirigido mediante a relación $\geqslant$. Consideremos otros ejemplos importantes.

3. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Construir una red $(r, \succ)$ tal que

$$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r, \succ) \to y_0.$$

4. Sean X, Y espacios topológicos, $f \colon X \to Y$ una función, $x_0 \in X$. Construir una red $(r, \succ)$ tal que

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r, \succ) \to y_0.$$

5. Sean X, Y espacios topológicos, Z un conjunto, $f\colon Z \to X$ y $g\colon Z \to Y$ unas funciones, $y_0 \in Y$. Se escribe que $g \xrightarrow{f \to x_0} y_0$ si para cada vecindad V de y_0 existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $z \in Z$ la condición $f(z) \in U$ implica $g(z) \in V$. Construir una red $(r, \succ)$ tal que

$$g \xrightarrow{f \to x_0} y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r, \succ) \to y_0.$$

6. Sea X un espacio topológico de Hausdorff (espacio del tipo T_2) y $(r, \succ)$ una red en X. Si $r \to x_1$ y $r \to x_2$ entonces $x_1 = x_2$. En otras palabras, una red en un espacio de Hausdorff no puede tener más que un límite.

7. Teorema (descripción de cerradura en términos de redes). Sean X un espacio topológico, Y un subconjunto de X y $z \in X$. Entonces $z \in \operatorname{clos}(Y)$ si y solo si existe una red r en Y tal que $r \to z$.

Definición (sistema de bases locales). Sea X un conjunto. Para cada punto $x \in X$ sea $\mathfrak{U}_x$ un sistema de subconjuntos de X, i.e. $\mathfrak{U}_x \subset X$. Se dice que $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ es *sistema de bases locales* en X si $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in X \quad \mathfrak{U}_x \neq \varnothing$.
2. $\forall x \in X \quad \forall U \in \mathfrak{U}_x \quad x \in U$.
3. $\forall x \in X \quad \forall U_1, U_2 \in \mathfrak{U}_x \quad \exists U_3 \in \mathfrak{U}_x \quad U_3 \subset U_1 \cap U_2$.
4. $\forall x \in X \quad \forall U \in \mathfrak{U}_x \quad \forall y \in U \quad \exists V \in \mathfrak{U}_y \quad V \subset U$.

Definición (sistema básico de vecindades abiertas). Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico. Para cada punto $x \in X$ sea $\mathfrak{U}_x$ un sistema de subconjuntos de X, i.e. $\mathfrak{U}_x \subset X$. Se dice que $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ es *sistema básico de vecindades abiertas de la topología* $\mathfrak{T}$ si para todo $x \in X$ se tiene $\mathfrak{U}_x \subset \mathfrak{T}_x$ y

$$\forall V \in \mathfrak{T}_x \quad \exists U \in \mathfrak{U}_x \quad U \subset V.$$

Aquí $\mathfrak{T}_x = \{V \in \mathfrak{T}\colon x \in V\}$.

8. Sean $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico y $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ un sistema básico de vecindades abiertas de la topología $\mathfrak{T}$. Entonces $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ cumple los axiomas de sistema de bases locales.

9. Sean X un conjunto y $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ un sistema de bases locales en X. Entonces existe una $\mathfrak{T}$ en X tal que $\{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ es un sistema básico de vecindades abiertas de $\mathfrak{T}$. Tal topología $\mathfrak{T}$ es única.

10. “Sucesiones no son adecuadas”. Sea X el conjunto $\mathbb{N}_0^2 = \{0, 1, 2, \ldots\}^2$. Para todo $(m, n) \neq (0, 0)$ sea $\mathfrak{U}_{(m,n)} = \{\{(m, n)\}\}$. $U \in \mathfrak{U}_{(0,0)}$ si y solo si

$$|\{m \in \mathbb{N}_0 \colon\ |\{n \in \mathbb{N}_0 \colon (m, n) \notin U\}| = \infty\}| < \infty.$$

Mostrar que $\{\mathfrak{U}_x\}_{x\in X}$ es un sistema de bases locales y por lo tanto define una topología en X. Mostrar que $(0, 0) \in \operatorname{clos}(X \setminus \{(0, 0)\})$ pero ninguna sucesión en $X \setminus \{(0, 0)\}$ converge al punto $(0, 0)$.

11. Teorema (criterio de continuidad en términos de redes). Sean X, Y espacios topológicos y $f \colon X \to Y$ una aplicación. Entonces f es continua si y solo si para cada red r en X convergente a un punto $x \in X$ la red $f \circ r$ converge al punto $f(x)$.

Topología débil

Definición (topología débil). Sean X un conjunto y $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^X$ un conjunto de funciones de X en $\mathbb{C}$. Suponemos que $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Para cada punto $x \in X$ definimos $\mathfrak{U}_x \subset 2^X$ como

$$\mathfrak{U}_x := \{U(x, \varepsilon, f_1, \ldots, f_k) \colon \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N},\ f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}\}$$

donde

$$U(x, \varepsilon, f_1, \ldots, f_k) := \{y \in X \colon |f_j(y) - f_j(x)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}.$$

12. El sistema de los conjuntos $\{\mathfrak{U}_x\}_{x\in X}$ cumple los axiomas de sistema de bases locales y por lo tanto efectivamente define una topología.

13. Criterio de convergencia respecto a la topología débil. Sean X un conjunto con la topología débil $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$, r una red en X y x un punto en X. ¿Cúando r converge a x?

14. Sea X un espacio de Banach y X^* el espacio dual correspondiente (el espacio de todos los funcionales lineales continuos). Recordar como se define la topología débil* en X^*. Mostrar que esta topología es un caso particular de la topología débil.

15. Teorema de Banach–Alaoglu. Sean X un espacio de Banach, Y la bola unitaria cerrada en X^*:

$$Y = \{f \in X^* \colon \|f\| \leqslant 1\}.$$

Entonces el conjunto Y es compacto en la topología débil*.