Distancia minimal entre conjuntos

Una parte importante de este curso consiste en el estudio de los espectros de algunos operadores y matrices. Para decir "los espectros de estos operadores *están cerca* uno de otro" o "la sequencia de los espectros de estas matrices *se converge* a ese conjunto", tenemos que definir la distancia entre los conjuntos.

Al principio, nos recordamos la noción de la "distancia minimal entre conjuntos" y algunas de sus propiedades.

Definición ("Distancia minimal entre conjuntos").
Para $X, Y \subset \mathbb{C}$,

$$\operatorname{dist}(X, Y) := \inf\{|x - y| \colon x \in X,\ y \in Y\}. \tag{1}$$

Para $x \in \mathbb{C}$ y $Y \subset \mathbb{C}$,

$$\operatorname{dist}(x, Y) := \operatorname{dist}(\{x\}, Y) = \inf\{|x - y| \colon y \in Y\}.$$

1. ¿Qué es el "valor natural" para $\operatorname{dist}(X, \varnothing)$?

2. Ejemplo. Sean $0 < r_1 < r_2$. Calcular $\operatorname{dist}(C(a, r_1), C(b, r_2))$ donde

$$C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| = r\}.$$

Considerar todos los casos posibles: $|a - b| > r_1 + r_2$, $r_2 - r_1 < |a - b| < r_1 + r_2$, etc.

3. Ejemplo. Calcular $\operatorname{dist}(D(a, r_1), D(b, r_2))$ donde $D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| \leqslant r\}$.

4. Sean $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subset \mathbb{C}$, $X_1 \subset X_2$ y $Y_1 \subset Y_2$. ¿Cuál es la relación entre $\operatorname{dist}(X_1, Y_1)$ y $\operatorname{dist}(X_2, Y_2)$?

5. Para $Y \subset \mathbb{C}$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, $\quad |\operatorname{dist}(x_1, Y) - \operatorname{dist}(x_2, Y)| \leqslant |x_1 - x_2|$.

6. Para $Y \subset \mathbb{C}$ tal que $Y \neq \varnothing$, la función

$$f \colon \mathbb{C} \to [0, +\infty), \qquad f(x) := \operatorname{dist}(x, Y),$$

es continua.

7. Para todos $X, Y \subset \mathbb{C}$, $\quad \operatorname{dist}(\operatorname{clos}(X), \operatorname{clos}(Y)) = \operatorname{dist}(X, Y)$.

8. Si el conjunto X es cerrado y el conjunto Y es compacto, entonces los infimos en la definición de dist (fórmula (1)) se alcanzan, i.e. existen $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tales que $\operatorname{dist}(X, Y) = |x_0 - y_0|$.

9. Encontrar un ejemplo cuando los conjuntos X y Y son cerrados pero los infimos en la definición de dist (fórmula (1)) no se alcanzan, i.e. $|x - y| > \operatorname{dist}(X, Y)$ para todos $x \in X$, $y \in Y$.

10. Sean $X, Y, Z \subset \mathbb{C}$. Expresar $\operatorname{dist}(X, Y \cup Z)$ en términos de $\operatorname{dist}(X, Y)$ y $\operatorname{dist}(X, Z)$.

11. Sean $X \subset \mathbb{C}$, $Z_\alpha \subset \mathbb{C}$, $Y = \bigcup_{\alpha \in A} Z_\alpha$. Expresar $\operatorname{dist}(X, Y)$ a través de $\operatorname{dist}(X, Z_\alpha)$.

12. Sean $x \in \mathbb{C}$ y $Y \subset \mathbb{C}$. ¿Cuándo $\operatorname{dist}(x, Y) = 0$?

13. Pregunta capciosa. Sean $X, Y \subset \mathbb{C}$. ¿Cuándo $\operatorname{dist}(X, Y) = 0$?

Notación. $\mathcal{K} := \{X \subset \mathbb{C}\colon\ X \text{ es compacto y no vacío}\}$.

14. "Distancia minimal" no es métrica. Probar que $(\mathcal{K}, \operatorname{dist}|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}})$ no es espacio métrico. ¿Cuáles de las propiedades de métrica no se cumplen para $(\mathcal{K}, \operatorname{dist}|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}})$?

15. Tarea creativa. Inventar alguna métrica d sobre $\mathcal{K}$ tal que $d(\{x\}, \{y\}) = |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{C}$.