Funciones holomorfas
con valores en un espacio de Banach

Sean X un espacio de Banach y $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y simplemente conexo.

Definición (función holomorfa). La función $f\colon D \to X$ se llama *holomorfa* si es diferenciable en cada punto $z_0 \in D$. La función se llama *diferenciable* o *complejo-diferenciable* en el punto $z_0 \in D$, si $\exists A \in X$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A.$$

Denotemos con $H(D, X)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas de D en X.

Definición (función analítica). Una función $f\colon D \to X$ se llama *analítica en D* si cerca de cada punta de D esta función se desarrolla en una serie de potencias.

Corolario del teorema de Hahn–Banach. Sean X un espacio de Banach y a un elemento de X. Si $f(a) = 0$ para cada funcional lineal continua $f \in X^*$, entonces $a = 0$.

Vamos a probar que para cada función continua $f\colon D \to X$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es holomorfa en D;

(a') para cada funcional $\varphi \in X^*$, $\varphi \circ f \in H(D, \mathbb{C})$;

(b) f es analítica en D;

(b') para cada $\varphi \in X^*$, $\varphi \circ f$ es analítica en D;

(c) para cada contorno cerrado $\gamma \subset D$, $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$;

(c') para cada funcional $\varphi \in X^*$ y cada contorno cerrado $\gamma \subset D$, $\displaystyle\oint_\gamma \varphi(f(z))\,dz = 0$;

(d) $\forall z \in D \quad \forall r \in (0, \operatorname{dist}(z, \partial D)) \qquad f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}$;

(d') $\forall \varphi \in X^* \quad \forall z \in D \quad \forall r \in (0, \operatorname{dist}(z, \partial D)) \qquad \varphi(f(z)) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|\xi - z| = r} \frac{\varphi(f(\xi))\,d\xi}{\xi - z}$.

1. Probar que (a)$\Rightarrow$(a'), (b)$\Rightarrow$(b'), (c)$\Rightarrow$(c') y (d)$\Rightarrow$(d').

2. En el curso de análisis complejo se muestra que las condiciones (a), (b), (c) y (d) son equivalentes para cada función $f\colon D \to \mathbb{C}$, i.e. para el caso $X = \mathbb{C}$. Recordar estas demostraciones y formular brevemente sus ideas.

3. Probar que las condiciones (a'), (b'), (c') y (d') son equivalentes.

4. (c')$\Rightarrow$(c) y (d')$\Rightarrow$(d).

5. Teorema de Morera. (c)$\Rightarrow$(a).

6. (d)$\Rightarrow$(a).

7. Teorema. Para cada función $f\colon D \to X$ todas las condiciones (a), (a'), (b), (b'), (c), (c'), (d) y (d') son equivalentes.

8. Teorema de Liouville. Sea $f\colon \mathbb{C} \to X$ una función entera (i.e. $f \in H(\mathbb{C}, X)$) y acotada (i.e. existe $C > 0$ tal que $\|f(z)\| \leqslant C$ para todos $z \in \mathbb{C}$). Entonces f es constante.

9. Convergencia absoluta ("normal") implica convergencia habitual. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge también.

10. Condición necesaria de convergencia. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una seria convergente. Entonces $\|a_n\| \to 0$. En particular, el conjunto $\{\|a_n\|\colon n \geqslant 0\}$ es acotado.

11. Fórmula de Cauchy–Hadamard para el radio de convergencia. Consideremos una serie de potencias (S) con los coeficientes en X: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Definamos el número $R \in [0, +\infty]$ por medio de la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

Entonces R es el *radio de convergencia* de la seria (S), i.e. la serie (S) se converge absolutamente cuando $|z| < R$ y diverge cuando $|z| > R$.