Cómo se surgen los operadores y las matrices de Toeplitz en otras áreas de matemáticas y otras ciencias? Consideremos un ejemplo simple.

Método de diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales con las condiciones de frontera

Consideremos el siguiente **problema de valor de frontera**, que consiste en una ecuación diferencial y dos condiciones de frontera:

$$\text{Encontrar} \quad f \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} f''(x) = g(x), & x \in (0,1); \\ f(0) = \alpha; \\ f(1) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Por supuesto, este problema es sencillo y se puede resolver con otros métodos. Pero lo consideramos como un modelo.

Al primero, una breve digresión. Nos recordemos como **aproximar las derivativas con diferencias finitas**. Por ejemplo,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{o} \qquad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Para mostrar estas fórmulas y estimar los errores podemos usar la fórmula de Taylor (suponiendo que f es bastante suave):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + O(h^3); \tag{2}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + O(h^3). \tag{3}$$

Restando (3) de (2) obtenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2).$$

Para aproximar $f''(x)$ tenemos que "matar" $f(x)$ y $f'(x)$, por lo tanto necesitamos los valores de f en tres puntos: $f(x-h)$, $f(x)$ y $f(x+h)$. Sumando (2) y (3) aniquilamos $f'(x)$, y después nos falta restar $2f(x)$:

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) + O(h).$$

Llegamos a la conclusión: $f''(x) \approx \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$.

Ejercicio 1. Expresar $f^{(4)}(x)$ a través de los valores $f(x)$, $f(x \pm h)$ y $f(x \pm 2h)$.

Ejercicio 2. Para una función de dos variables f, expresar su laplaciano $\Delta f(x,y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ a través de los valores $f(x)$, $f(x+u,y)$, $f(x-u,y)$, $f(x,y+v)$, $f(x,y-v)$.

Ahora volvamos a nuestro problema inicial (1). Nuestro objetivo es substituirlo a un sistema de ecuaciones lineales para los valores $f(x_k)$ donde

$$x_k = kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1, \qquad h = \frac{1}{n+1}.$$

Usamos la notación $f_k := f(x_k)$. Un dibujo:

$$\alpha — f_1 — f_2 — f_3 — f_4 — \beta$$

Para $n = 4$, venimos al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha; \\ f_0 - 2f_1 + f_2 &= h^2 g(x_1); \\ f_1 - 2f_2 + f_3 &= h^2 g(x_2); \\ f_2 - 2f_3 + f_4 &= h^2 g(x_3); \\ f_3 - 2f_4 + f_5 &= h^2 g(x_4); \\ f_5 &= \beta. \end{aligned}$$

Usando la primera y la última ecuación, nos libramos de las variables f_0 y f_5:

$$\begin{aligned} -2f_1 + f_2 &= h^2 g(x_1) - \alpha; \\ f_1 - 2f_2 + f_3 &= h^2 g(x_2); \\ f_2 - 2f_3 + f_4 &= h^2 g(x_3); \\ f_3 - 2f_4 &= h^2 g(x_4) - \beta; \end{aligned}$$

En la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 g(x_1) - \alpha \\ h^2 g(x_2) \\ h^2 g(x_3) \\ h^2 g(x_4) - \beta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Podemos escribir tal sistema de ecuaciones para cualquier n. Las matrices de estos sistemas son **matrices de Toeplitz**, porque cada diagonal paralela a la diagonal principal está llena por un elemente.

Bajo ciertas condiciones, que no vamos a estudiar ahora, las soluciones de los sistemas (4) se acercan a la solución del problema inicial (1), cuando el número de los puntos n se tiende al infinito.

Generalizaciones

En lugar de la ecuación $f''(x) = g(x)$ podemos considerar algunas ecuaciones más interesantes:

1. Problema de valores propios: $f''(x) - \lambda f(x) = g(x)$.
2. Ecuaciones con derivadas de otros órdenes: $f^{(4)}(x)+p_1 f^{(3)}(x)+\ldots+p_4 f(x) = g(x)$.
3. Coeficientes no son constantes, por ejemplo: $p(x)f''(x) - \lambda f(x) = g(x)$.
4. Ecuaciones en derivadas parciales (por ejemplo, ecuaciones elípticas) sobre los dominios en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

En las situaciones 3 y 4 el método de diferencias finitas no nos lleva a matrices de Toeplitz sino a matrices que se parecen en algún sentido a las matrices de Toeplitz. Entre estas generalizaciones se puede llamar **las matrices de bloques de Toeplitz** (**block Toeplitz matrices**) y **las matrices de Toeplitz con coeficientes variables**.

Ejercicio 3. Escribir "la versión discreta" del problema

$$\begin{cases} f^{(4)}(x) + 3f''(x) - 4f(x) = g(x); \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f(1) = 3, \quad f'(1) = 4. \end{cases}$$

Dividir el segmento $[0, 1]$ en 8 partes.

Ejercicio 4. Escribir "la versión discreta" del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g(x,y), & x, y \in (0,1); \\ f(0,y) = a(y), & y \in [0,1]; \\ f(1,y) = b(y), & y \in [0,1]; \\ f(x,0) = c(x), & x \in [0,1]; \\ f(x,1) = d(x), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dividir cada de dos segmentos $[0, 1]$ en 5 partes y usar las siguientes notaciones: