Factorización en $W(\mathbb{T})$

Recordamos algunas afirmaciones que ya sabemos:

Proposición. Sean A un álgebra de Banach con unidad e, $a \in A$ y $\|a-e\| < 1$. Entonces $a \in \exp(A)$.

Proposición. $C^1(\mathbb{T})$ es denso en $W(\mathbb{T})$.

Proposición. $\exp(C^1(\mathbb{T})) = \{a \in \operatorname{Inv}(C^1(\mathbb{T}))\colon\ \operatorname{wind}(a) = 0\}$.

1. Teorema (descripción de $\exp(W(\mathbb{T}))$).

$$\exp(W(\mathbb{T})) = \{a \in \operatorname{Inv}(W(\mathbb{T}))\colon\ \operatorname{wind}(a) = 0\}.$$

Subálgebras $W^+(\mathbb{T})$ y $W^-(\mathbb{T})$

Definición ($W^+(\mathbb{T})$ y $W^-(\mathbb{T})$.

$$W^+(\mathbb{T}) = \{a \in W(\mathbb{T})\colon a_n = 0 \text{ si } n < 0\}, \qquad W^-(\mathbb{T}) = \{a \in W(\mathbb{T})\colon a_n = 0 \text{ si } n > 0\}.$$

2. $W^+(\mathbb{T})$ y $W^-(\mathbb{T})$ son subálgebras de $W(\mathbb{T})$ con la misma unidad $e = e_0$.

3. Cualquiera función $a \in W^+(\mathbb{T})$ se puede extender a una función continua en $\mathbb{T} \cup \mathbb{D}$ y analítica en $\mathbb{D}$:

$$a(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \qquad (|z| \leqslant 1).$$

4. Cualquiera función $a \in W^-(\mathbb{T})$ se puede extender a una función continua en $\mathbb{T} \cup \mathbb{D}^-$ y analítica en $\mathbb{D}^-$, donde $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\colon |z| > 1\}$:

$$a(z) = \sum_{n \leqslant 0} a_n z^n \qquad (|z| \geqslant 1).$$

Definición (proyección de Szegö en $W(\mathbb{T})$). Definimos la proyección de Szegö en $W(\mathbb{T})$ por

$$P^+\colon\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n \mapsto \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n.$$

La proyección complementaria $I - P^+$ se denota por P^-.

5. La proyección P^+ es continua en $W(\mathbb{T})$.

6. Si $a \in W(\mathbb{T})$, entonces $P^+a \in W^+(\mathbb{T})$, $P^-a \in W^-(\mathbb{T})$ y $(P^-a)(\infty) = 0$.

Factorización canónica en $W(\mathbb{T})$

Definición (factorización en $W(\mathbb{T})$). *Factorización canónica* de una función $a \in \operatorname{Inv}(W(\mathbb{T}))$ es la tripla (a^+, a^-, κ) tal que

$$a = t^\kappa a^+ a^-, \quad \kappa = \operatorname{wind}(a), \quad a^+ \in \exp(W^+(\mathbb{T})), \quad a^- \in \exp(W^-(\mathbb{T})), \quad a^-(\infty) = 1.$$

En particular, $a^\pm \in \operatorname{Inv}(W^\pm(\mathbb{T}))$.

7. Existencia de factorización canónica. Para toda $a \in \operatorname{Inv}(W(\mathbb{T}))$ existe una factorización canónica.

8. Unicidad de factorización canónica. Para toda $a \in \operatorname{Inv}(W(\mathbb{T}))$, la factorización canónica es única.

Factorización de funciones racionales

9. Funciones racionales están en $W(\mathbb{T})$. Si P y Q son polinomios y $Q(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$, entonces la función P/Q es un elemento de $W(\mathbb{T})$. Si además $P(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$, entonces $P/Q \in \operatorname{Inv}(W(\mathbb{T}))$.

10. Si $|\alpha| < 1$, entonces $1 - \alpha t \in \exp(W^+(\mathbb{T}))$ y $1 - \alpha t^{-1} \in \exp(W^-(\mathbb{T}))$.

11. Calcular la factorización canónica para

$$a(t) = \frac{4t^2 + 2t - 3}{t + 2}.$$

Construcción del operator inverso para $T(a)$, $a \in \exp(W(\mathbb{T}))$

12. Sea $a \in \exp(W(\mathbb{T}))$, i.e. $a \in W(\mathbb{T})$, $a(t) \neq 0$ para $t \in \mathbb{T}$ y $\operatorname{wind}(a) = 0$. Sea $(1, a^+, a^-)$ la factorización canónica de a. Entonces

$$T(a)^{-1} = T(1/a^+) T(1/a^-).$$