Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

10 de Julio de 1998

1. Algebra lineal

1.1 Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que consiste de todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z + w &= 0 \\ x + y + z - w &= 0 \\ 2x + 4z - w &= 0 \end{aligned}$$

Determina una base para V

1.2 Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Encontrar una base para la imagen de la transformación lineal T: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por A.

1.3 Sea $T(x.y, z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z)$.

(a) Encuentre la representación matrical de T con respecto a la base canónica.

(b) Determine los valores propios de T y una base para los subespacios de vectores propios correspondientes.

2. Cálculo

2.1 Calcular el límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}$$

2.2 Diga si las series

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

convergen y porqué.

2.3 Sea g:(1,∞)$\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \int_1^{x^3} cos(1+\sqrt{t})dt$$

Calcular $g'(x)$

3. Problemas opcionales

3.1 Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden $n \times n$ con entradas reales y con las operaciones usuales de matrices. Sea

$$W = \{A \in V | A^t = -A\}$$

donde A^t es la transpuesta de A. Es W un subespacio vectoral de V?

3.2 Sea $f_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$, con $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Para qué valores de n es f_n uniformemente continua?

3.3 Sea $(X, \overline{d})$ un sepacio métrico y defina para $x, y \in X$
$\overline{d}(x, y) := \min \{1, d(x, y)\}$.

Demostrar que $\overline{d}$ es una métrica sobre X.

3.4 Sea $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ una suceción de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Es $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$?

3.5 Demostrar que el grupo cociente $\mathbb{C}^*/S^1$ es isomorfo a $\mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}, \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ son considerados como grupos multiplicativos.