

Examen de admisión a la Maestría

Julio de 2004

1. Álgebra lineal

1.1 Encuentre una matriz cuadrada 4×4 A cuya cuarta potencia A^4 sea la matriz cero, pero tal que ninguna de sus otras potencias A , A^2 y A^3 sea la matriz cero.

1.2 Considere el conjunto compuesto por todos los polinomios con coeficientes reales y grado mayor o igual a dos. Determine si este conjunto es un espacio vectorial.

1.3 Dados los siguientes vectores $v_1 = (3, 5, 11)$ y $v_2 = (2, 4, 8)$ en el espacio euclidiano \mathbf{R}^3 . Calcular un vector unitario $v_3 \in \mathbf{R}^3$ que sea ortogonal tanto a v_1 como a v_2 .

2. Cálculo

2.1 Considere la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida recursivamente por la ecuación $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 3$, para $n \geq 0$. Determine los valores iniciales x_0 para los cuales se obtiene una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ constante.

2.2 Calcular la derivada $\frac{df(t)}{dt}$ de la siguiente función

$$f(t) = \int_0^t \frac{e^{st}}{s} ds$$

2.3 Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$yF(xy)dx = xG(xy)dy$$

3. Problemas opcionales

3.1 Demostrar que la siguiente serie converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

3.2 Determinar una transformación conforme que envíe el semiplano superior $\Im(z) > 0$ en la franja infinita $0 < \Im(z) < \pi$.

3.3 Calcular cual es el grupo fundamental del plano proyectivo \mathbf{RP}^2 .

3.4 Calcular el valor numerico de la integral

$$2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4 + 1}$$