Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

Enero de 2005

1. Algebra lineal

1.1 Sea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ el espacio vectorial formado por todas las matrices cuadradas $[2 \times 2]$; considere además la transformación lineal $T : \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ dada por $T(A) =$ transpuesta de A. Calcular una base para $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ tal que la transformación T esté representada por una matriz diagonal. ¿Cuáles son los posibles valores de la diagonal?

1.2 Demostrar que el espacio compuesto por todos los polinomios (con la suma y multiplicación estandar) es un espacio vectorial. Determinar además, cual es la dimensión de este espacio vectorial de polinomios.

1.3 Encontrar un vector unitario en $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a los vectores [2, 4, 8] y [3, 9, 27].

2. Cálculo

2.1 Calcular la derivada de la función $\int_0^x e^{(x+t)^8} dt$, con respecto a x.

2.2 Dar un ejemplo de una sucesión **no** acotada de números reales $\{x_n\}$ con al menos dos puntos de acumulación.

2.3 Demostrar el teorema de Euler sobre funciones homogéneas. Una función $F(x, y, z)$ se llama homogénea de grado p si para cualquier parametro λ se tiene que:

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p F(x, y, z).$$

Demostrar que si $F(x, y, z)$ es homogénea de grado p, entonces:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = pF(x, y, z).$$

3. Problemas opcionales

3.1 Demostrar que toda función racional periodica $\frac{p(z)}{q(z)}$ es constante.

3.2 Calcular cual es el grupo fundamental del plano proyectivo $\mathbf{RP}^2$.

3.3 Determinar si existen grupos **no** abelianos con un número primo de elementos.

3.4 Sea X un espacio topológico localmente conexo. Considere un abierto U de X y una componente conexa C de U. Demostrar que $U \cap FrC = \emptyset$.