Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

13 de Diciembre del 2007

1. Algebra Lineal

1.1 Sean p , q, r y s polinomios de grado a lo mas 3. ¿Cuáles de las siguientes dos condiciones, si es que hay alguna, es suficiente para concluir que los polinomios son linealmente dependientes?

(a) El valor de los polinomios evaluados en 1 es cero.

(b) El valor de los polinomios evaluados en 0 es uno.

1.2 ¿Existen números reales r_1, r_2, r_3 y r_4 tales que los polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x-r_1)(x-r_2) \\ p_2(x) &= (x-r_2)(x-r_3) \\ p_3(x) &= (x-r_3)(x-r_4) \\ p_4(x) &= (x-r_4)(x-r_1) \end{aligned}$$

sean linealmente independientes?

1.3 Suponga que A y B son endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo F. Demuestre o dé un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

(a) Todo eigenvector de AB es un eigenvector de BA.

(b) Todo eigenvalor de AB es un eigenvalor de BA.

2. Cálculo

2.1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,0) = 0$ y

$$f(x,y) = (1 - \cos\frac{x^2}{y})\sqrt{x^2+y^2} \text{ para } y \neq 0.$$

(a) Demuestre que f es continua en $(0,0)$,

(b) Calcule todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$,

(c) Demuestre que f no es diferenciable en $(0,0)$.

2.2 Determine si las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

convergen y de los argumentos de por qué.

2.3 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}$$

3. Problemas opcionales

3.1 Encuentre todos los grupos con ocho elementos.

3.2 Sea X un espacio topológico conexo y localmente arco-conexo. Demuestre que X es arco-conexo.

3.3 Demuestre que para toda x se tiene

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x \leq 1$$

3.4 Demuestre que si G es un grupo en el cual todo elemento es su propio inverso, entonces G es abeliano.