Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

7 de Agosto del 2008

1. Algebra Lineal

1.1 Considere los vectores

$$v_1 = (1, 1, 1, a), v_2 = (1, 2, 3, a), v_3 = (b, -1, 0, 1), v_4 = (0, b, 0, 0)$$

donde a, b son números reales. Determine la dimensión máxima y mínima del espacio generado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

1.2 Dé un ejemplo de una matriz 3×3 con entradas reales que no sea similar a una matriz diagonal.

1.3 Encuentre una base para el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Cálculo

2.1 Calcule el límite

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\frac{a}{x}).$$

2.2 Sean y_1, y_2, y_3 tres soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y'(x) = a(x)y(x)$. Demuestre que la expresión

$$\frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)}$$

es constante.

2.3 Hallar los máximos y mínimos locales de la función

$$y(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

3. Problemas opcionales

3.1 Demuestre que todo grupo de orden 4 es isomorfo a $\mathbb{Z}^4$ o a $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$.

3.2 De un ejemplo de una sucesión de funciones en $L_2(\mathbb{R})$ que converge a 0 puntualmente, pero que no converge a 0 con la norma en $L_2(\mathbb{R})$.

3.3 Sea A un conjunto conexo, abierto y cerrado en un espacio metrico X. Demuestre que A es una componente conexa de X.

3.4 Demuestre que toda biyeccción holomorfa entre dos discos del plano complejo es de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

para algunas constantes a, b, c, d.

Sugerencia: Use el Lema de Schwarz.