

**Revista de
Ciencias Básicas
UJAT**

*Volumen 9
Número 2
Enero 2011*

Contenido

- Invariantes en geometría y topología **3**
Daniel Juan Pineda
- Conjuntos de Julia racionales y empaques de
Sierpinski generalizados **9**
Mónica Moreno Rocha
- Métodos algebraicos para códigos parametrizados
por monomios **17**
*Eliseo Sarmiento, Rafael H. Villarreal, Carlos Rentería,
Aron Simis y María Vaz Pinto*
- Distribución de confianza del parámetro de forma
de la distribución gamma, cuando el de escala es
de ruido **29**
Edilberto Nájera Rangel
- Distribuciones de confianza **39**
Edilberto Nájera Rangel y Braly Guadalupe Peralta Reyes

**Cunduacán
Tabasco
México**



Año Internacional de la
QUÍMICA
2011



REVISTA DE CIENCIAS BASICAS UJAT
es editada por la
División Académica de Ciencias Básicas
de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Editores

Dr. Abdiel E. Cáceres González (abdiel.caceres@ujat.mx)
Dr. José Leonardo Sáenz Cetina (leonardo.saenz@ujat.mx)

Comité editorial

Física

M.C. Esteban Andrés Zárate

Química

Dr. Isaías Magaña Mena

M.C. Ma. Teresa Gamboa Rodríguez

Matemáticas

M.C. Robert Jeffrey Flowers

Computación

L.S.C.A. Diana G. Chuc Durán

Descripción

La Revista de Ciencias Básicas UJAT es una publicación semestral, dedicada a la difusión de las ciencias básicas. Se dirige a profesores y estudiantes universitarios, y en general a todos los interesados en las ciencias. Su propósito es ofrecer un espacio que permita informar sobre las investigaciones en el área correspondiente y difundir temas generales de las ciencias básicas.

Información para autores

Los autores deben enviar por correo electrónico a revistaCB@dacb.ujat.mx, un paquete que contenga los archivos fuente, tanto del texto en **LaTeX2e**; las imágenes en formato **JPG** y una copia en formato **PDF** del artículo propuesto. El artículo será distribuido a los revisores, quienes darán su aprobación para que sea publicado. El autor es libre de utilizar el molde para conservar el estilo tipográfico de la revista. Este molde se puede obtener desde la página WEB de la revista en http://www.dacb.ujat.mx/revistas_online.html, en la sección de *Información para autores*. También es posible solicitarlo por correo electrónico directamente a los editores.

El contenido de los artículos debe ser de interés científico en las áreas de física, matemáticas, computación y química; pudiendo ser de divulgación de temas de investigación o de reportes de investigación. La extensión deseable de los artículos oscila entre las 5 y 15 páginas, pudiendo extenderse tanto como sea necesario de acuerdo a los criterios de los editores.

Todos los artículos deberán ser escritos en español o inglés, con un resumen de no más de 150 palabras tanto en español como en inglés.

Para encontrar revisores adecuados, agregue el siguiente cuestionario resuelto en el correo electrónico que nos envíe:

- 1) ¿Cuál es la contribución importante de este trabajo?
- 2) ¿Cuáles son las áreas de conocimiento más relacionadas con este trabajo?

Suscripción a la Revista Ciencias Básicas UJAT

La suscripción es absolutamente gratuita, solamente envíe un correo electrónico a cualquiera de los editores, proporcionando la siguiente información:

- a) Nombre del representante institucional, o de la persona.
- b) Dirección postal
- c) Dirección electrónica
- d) Número de ejemplares que desea.

Advertencia

El contenido de los artículos es responsabilidad única del autor. Toda aclaración en cuanto al contenido de los artículos, debe ser enviada por correo electrónico al autor que corresponde.

ISSN: [En trámite]

Página WEB:

http://www.dacb.ujat.mx/revistas_online.html

Correo electrónico:

revistacb@ujat.mx

**Revista de
Ciencias Básicas
UJAT**

*Volumen 9
Número 2
Enero 2011*

**Cunduacán
Tabasco
México**



Año Internacional de la
QUÍMICA
2011



Contenido

Invariantes en geometría y topología <i>Daniel Juan Pineda</i>	3
Conjuntos de Julia racionales y empaques de Sierpinski generalizados <i>Mónica Moreno Rocha</i>	9
Métodos algebraicos para códigos parametrizados por monomios <i>Eliseo Sarmiento, Rafael H. Villarreal, Carlos Rentería, Aron Simis y María Vaz Pinto</i>	17
Distribución de confianza del parámetro de forma de la distribución gamma, cuando el de escala es de ruido <i>Edilberto Nájera Rangel</i>	29
Distribuciones de confianza <i>Edilberto Nájera Rangel y Braly Guadalupe Peralta Reyes</i>	39

Invariantes en Geometría y Topología *

Daniel Juan Pineda †

Universidad Nacional Autónoma de México

En esta nota definiremos el grupo de Whitehead asociado a un grupo. Describiremos los fenómenos topológicos que deseamos estudiar con este grupo y algunos resultados actuales al respecto.

We will define the Whitehead group associated to a group. We will also describe topological phenomena that are classified by these groups and some recent results.

Palabras claves: Grupo de Whitehead, teoría K , h -cobordismo.

Keywords: Whitehead group, K -theory, h -cobordism.

1. Introducción

Tanto en geometría como en topología nos interesa clasificar objetos de acuerdo a sus propiedades, para esto encontramos diferentes nociones de equivalencia, a saber por homeomorfismo, isometría o equivalencia homotópica. Cada uno de estos conceptos resaltan propiedades diferentes de los objetos a clasificar: el primero y el tercero se enfocan a propiedades invariantes bajo deformaciones mientras que el segundo resalta propiedades métricas del objeto. El grupo de Whitehead, $Wh(G)$ asociado a un grupo es un grupo naturalmente asociado a un grupo y clasifica una clase de objetos asociados a un espacio denominados h -cobordismos, estos h -cobordismos los podemos pensar como deformaciones de una homotopía, en cierta forma miden cuantas deformaciones de una homotopía se pueden construir. El proceso de definir $Wh(G)$ pasa por un problema clásico de álgebra lineal: dada una matriz invertible, ¿Cuándo la puedo llevar mediante operaciones elementales a una matriz diagonal? En álgebra lineal clásica sobre un campo, ésto siempre es posible, el aspecto novedoso es que trabajaremos con matrices sobre anillos, probablemente no conmutativos. En la segunda parte de este trabajo daremos propiedades generales de $Wh(G)$ para familias de grupos conocidos. Finalmente relacionaremos $Wh(G)$ con topología y veremos algunos problemas abiertos.

2. Un poco de álgebra

Sea R un anillo con unidad 1 y consideremos el grupo $GL_n(R)$ de las matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en R . Ahora consideremos las inclusiones

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset GL_3(R) \cdots$$

*Recibido el 10 de Junio de 2010 y aceptado el 8 de Septiembre de 2010

†**Dirección postal:** Instituto de Matemáticas, Unidad Morelia, UNAM Campus Morelia, Morelia Michoacán, C. P. 58089 Tel.(+52) 322 27 98. **Correo electrónico:** daniel@matmor.unam.mx

dadas por

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos $GL(R) = \cup_k (GL_k)$. Notemos que $GL(R)$ es un grupo y que sus elementos son matrices invertibles arbitrariamente grandes. Ahora definimos $K_1(R) = GL(R)^{ab}$ donde $GL(R)^{ab}$ denota al grupo *abelianizado* de $GL(R)$. Por definición $K_1(R)$ es un grupo abeliano. Veamos algunos ejemplos:

1. Cuando F es un campo o un anillo euclidiano se tiene que $K_1(F) = F^*$ donde F^* denota a las unidades. Esto se debe a que sobre anillos de esta clase siempre podemos diagonalizar una matriz invertible con operaciones elementales.
2. Si R es un anillo *local* se tiene que $K_1(R) = R_{ab}^*$ donde nuevamente tenemos que R^* denota a las unidades de R y R_{ab} denota a R modulo el ideal generado por $xy - yx$ con $x, y \in R^*$.

Una clase de anillos que aparecen frecuentemente son los *anillos de grupo* que a continuación definimos. Sea G un grupo, el anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$ de G se define como sigue: sus elementos son combinaciones lineales enteras

$$n_1g_1 + n_2g_2 + \cdots + n_kg_k; \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad g_i \in G,$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$. La suma es coordenada a coordenada y para la multiplicación uso la de G y ley de distribución. Por ejemplo para $G = C_2 = \{e, \sigma | \sigma^2 = e\}$ el grupo de dos elementos tenemos

$$\mathbb{Z}[C_2] \cong \mathbb{Z}[x]/x^2 - 1$$

ya que sus elementos son de la forma $n + m\sigma$ con la suma $(n_1 + m_1\sigma) + (n_2 + m_2\sigma) = (n_1 + n_2) + (m_1 + m_2)\sigma$ y producto $(n_1 + m_1\sigma)(n_2 + m_2\sigma) = (n_1n_2 + m_1m_2) + (n_1m_2 + n_2m_1)\sigma$. En este caso es inmediato probar que $\mathbb{Z}[C_2]$ es conmutativo y en general se tiene que $\mathbb{Z}[G]$ es un anillo conmutativo si y sólo si G es un grupo conmutativo.

Los elementos $\pm g$ con $g \in G$ producen elementos obvios en $GL_1(\mathbb{Z}[G])$ y por lo tanto en $GL(\mathbb{Z}[G])$. Denotemos por $\pm G$ al grupo generado por estos elementos en $GL(\mathbb{Z}[G])$.

Definición 1. Sea G un grupo y $\mathbb{Z}[G]$ su anillo entero de grupo. El grupo de Whitehead $Wh(G)$ se define como el cociente:

$$Wh(G) = K_1(\mathbb{Z}[G]) / \pm G.$$

Un ejemplo inmediato es cuando $G = \{e\}$ es el grupo trivial, tenemos que $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}$ y por lo tanto $Wh(G) = 0$, ya que “toda matriz invertible con coeficientes enteros se diagonaliza”. Es un hecho no trivial que $Wh(C_2) = 0$ aunque no es para nada obvio que podemos diagonalizar matrices invertibles con coeficientes en $\mathbb{Z}[C_2]$. El primer ejemplo de un grupo finito con grupo de Whitehead no trivial es C_5 , el grupo cíclico de cinco elementos. En este caso se tiene que $Wh(C_5) = \mathbb{Z}$. Es decir, existen una infinidad de matrices invertibles con coeficientes en $\mathbb{Z}[C_5]$ que no se diagonalizan. Por otro lado se sabe que $Wh(S_n) = 0$ donde S_n es el grupo de permutaciones de n letras. A continuación enunciamos algunos resultados generales para grupo *finitos* vea [5]:

1. $Wh(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado.
2. $Wh(G) = SK_1(G) + \mathbb{Z}^r$, donde $SK_1(G)$ es, por definición el núcleo del homomorfismo inducido por la inclusión $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ en K_1 :

$$SK_1(\mathbb{Z}[G]) = Nuc[K_1(\mathbb{Z}[G]) \rightarrow K_1(\mathbb{Q}[G])].$$

3. $r = r_{\mathbb{R}}(G) - r_{\mathbb{Q}}(G)$, donde $r_{\mathbb{R}}(G)$ es el número de representaciones reales irreducibles de G y $r_{\mathbb{Q}}(G)$ es el número de representaciones racionales irreducibles de G .

Una pregunta que nos viene inmediatamente es si existe algo análogo a lo anterior para grupos infinitos. Por ejemplo para el grupo \mathbb{Z} sabemos que $Wh(\mathbb{Z}) = 0$, ver ejemplo más adelante, nuevamente este es un hecho no trivial y requiere técnicas avanzadas para su cálculo. Una pregunta fundamental es ¿para que grupos se tiene que $Wh(G)$ es un grupo finitamente generado?

3. Un poco de topología

Recordemos algunos conceptos de topología. Una variedad n -dimensional es un espacio topológico Hausdorff que localmente es como un espacio euclidiano, es decir, cada punto p de M tiene una vecindad $U \subset M$ y un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una variedad con frontera es un espacio topológico Hausdorff tal que cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n o a $\mathbb{R}_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$. En una variedad con frontera, la frontera de M se define como los puntos que tienen una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}_+ y con última coordenada cero y la denotamos por ∂M . No es muy difícil convencerse de que si M es una variedad con frontera, se tiene que la frontera es una variedad y que ésta ya no tiene frontera. El problema de clasificar variedades es central en topología. Este problema está resuelto para variedades compactas de dimensión 1 y 2. Sin embargo es un problema abierto en dimensión 3 e irresoluble para dimensiones mayores a 3. Hacen falta otras relaciones de equivalencia como la que a continuación describimos.

Definición 2. Sea W^{n+1} una variedad con frontera de dimensión $n + 1$. Sean M_1 y M_2 las componentes de la frontera de W . Supongamos que se tienen retracciones $r_1 : W \rightarrow M_1$ y $r_2 : W \rightarrow M_2$. Entonces diremos que W es un h -cobordismo.

El ejemplo más inmediato de un h -cobordismo es el producto $W = M \times I$, donde M es una variedad sin frontera, $I = [0, 1]$. En este caso $\partial W = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$ y las retracciones $r : W \rightarrow M$ son las proyecciones obvias.

Definición 3. Diremos que dos h -cobordismos W_1 y W_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : W_1 \rightarrow W_2$ tal que $f(\partial W_1) \cong \partial W_2$. Al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos como $\{W^{n+1}\} / \sim$.

El problema real es descubrir h -cobordismos no triviales. Esta es una tarea altamente no trivial. Si embargo, el siguiente formidable teorema nos relaciona el grupo de Whitehead con los h -cobordismos:

Teorema 1 (Barden, Mazur, Stallings) Sea $n \geq 5$, W^{n+1} un h -cobordismo y $G = \pi_1(M_1)$ el grupo fundamental de la componente M_1 de la frontera de W . Se tiene una biyección entre los conjuntos $\{W^{n+1}\} / \sim$ con $G = \pi_1(M_1)$ y los elementos de $Wh(G)$. Bajo esta correspondencia, el h -cobordismo trivial corresponde al elemento trivial de $Wh(G)$.

Como consecuencia de lo anterior tendremos que NO existen h -cobordismos no triviales con frontera una variedad con grupo fundamental C_2 . Por otro lado existen una infinidad de h -cobordismos no triviales y no equivalentes si esta variedad tiene grupo fundamental C_5 . En caso de tener que la variedad frontera tiene grupo fundamental un grupo cíclico infinito, mencionamos anteriormente que este grupo tiene grupo de Whitehead trivial, por lo tanto tampoco en este caso existen h -cobordismos no triviales.

4. El caso de grupos infinitos

Cuando G es un grupo finito, vimos en la sección anterior que $Wh(G)$ es un grupo abeliano finitamente generado y actualmente existen técnicas algebraicas que nos permiten describir $Wh(G)$ con bastante precisión (vea [5]). Sin embargo para grupos infinitos no existen teoremas generales que den propiedades cualitativas $Wh(G)$. Veamos dos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1.

Consideremos, C , el grupo cíclico infinito generado por un elemento t , es decir $C = \{t^i | i \in \mathbb{Z}\}$, el anillo de grupo de C es isomorfo al anillo de polinomios de Laurent en las variables t, t^{-1} :

$$\mathbb{Z}[C] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Esto nos lleva naturalmente a estudiar K_1 para anillos de polinomios.

Ejemplo 2.

Por otro lado si consideramos el grupo $G = C_4 \times C$ donde C es el grupo cíclico infinito y C_4 es el grupo cíclico de 4 elementos. El anillo de grupo de G nuevamente es isomorfo a un anillo de polinomios de Laurent:

$$\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[C_4 \times C] \cong \mathbb{Z}[C_4][t, t^{-1}].$$

En otras palabras el anillo entero de G es isomorfo al anillo de polinomios de Laurent del anillo $\mathbb{Z}[C_4]$.

En los dos ejemplos anteriores tenemos grupos infinitos aparentemente muy sencillos y su grupo de Whitehead involucra el cálculo en anillos de polinomios de Laurent. Este caso ha sido estudiado por H. Bass, A. Heller y R. Swan en [2] y encontraron una fórmula que lo describe. Para esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 4. Sea R un anillo con 1 y $\epsilon : R[t] \rightarrow R$ la aumentación que en el generador t se define como: $\epsilon(t) = 1$. El grupo *Nil* de Bass se define como el núcleo

de la función inducida por ϵ ,

$$NK_1(R) = Nuc[\epsilon_* : K_1(R[t]) \rightarrow K_1(R)].$$

Puesto que la inclusión de R en su anillo de polinomios como los polinomios constantes es una sección para ϵ se sigue que $NK_1(R)$ es un sumando directo de $K_1(R[t])$.

El *Teorema fundamental de Bass-Heller-Swan* nos da una descripción del grupo de Whitehead en el caso que hemos descrito arriba:

Teorema 2 (Teorema fundamental) Sea C es grupo cíclico infinito y G un grupo arbitrario. Entonces se tiene un isomorfismo natural

$$Wh(G \times C) = Wh(G) \oplus \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]) \oplus NK_1(\mathbb{Z}[G]) \oplus NK_1(\mathbb{Z}[G]),$$

donde $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G])$ es el grupo de Grothendieck del monoide de clases de isomorfismo de $\mathbb{Z}[G]$ -módulos proyectivos finitamente generados módulo los $\mathbb{Z}[G]$ -módulos libres finitamente generados vea, [6].

Aplicando este teorema para los dos ejemplos descritos arriba tendremos

1. Para $G = \{e\}$ es un hecho conocido que $NK_1(\mathbb{Z}) = 0$, además en este caso también se tiene que $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}) = 0$ y que $Wh(\mathbb{Z}) = 0$ por lo tanto se tiene que

$$Wh(\mathbb{Z}) = 0.$$

2. Por otro lado para $G = C_4$ tendremos $Wh(C_4) = 0$, $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[C_4]) = 0$ pero $NK_1(\mathbb{Z}[C_4]) \cong \bigoplus_{\infty} \mathbb{Z}/2$, una suma directa de un una infinidad de copias del grupo $\mathbb{Z}/2$ y por lo tanto

$$Wh(C_4 \times C) \cong \bigoplus_{\infty} \mathbb{Z}/2.$$

En este caso tendremos que ¡ $Wh(C_4 \times C)$ es un grupo abeliano infinitamente generado!

Lo anterior contrasta con lo que sucede para grupos finitos y nos da una indicación de la complejidad en el cálculo de grupos de Whitehead en estos casos. También nos da la idea (vía el teorema de clasificación de h -cobordismos) de la existencia de muchísimos más h -cobordismos cuando el grupo fundamental es infinito, incluso cuando el grupo es “aparentemente sencillo” como $C_4 \times C$.

El cálculo de grupos de Whitehead puede ser una tarea imposible, en muchos casos la manera de aproximarse a éstos es con topología, geometría y otras ramas de las matemáticas. Usando estos métodos se han llevado a cabo algunos cálculos exitosos, enlistemos algunos:

1. Sea G el grupo fundamental de una superficie compacta y sin frontera. Se tiene que $Wh(G) = 0$. Este es un hecho formidable, ya que estos grupos son muy sofisticados y casi todos no conmutativos, vea [4].

2. Sea G un grupo *Fuchsiano* finitamente generado. Estos grupos son subgrupos de transformaciones de Möbius especiales y sus subgrupos finitos son todos cíclico. En este caso se tiene

$$Wh(G) = \bigoplus_{G_i \in Conj(G)} Wh(G_i),$$

donde los G_i varían sobre una familia $Conj(G)$ de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos finitos de G , es de notar que esta familia es finita, vea [3].

3. Sea G_n el grupo de n -trenzas clásicas de Artin. Estos grupos aparecen en muchas ramas de las matemáticas y no contienen elementos de orden finito. En este caso se tiene, vea [1]

$$Wh(G_n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En la actualidad, el estudio de los grupos de Whitehead para grupos infinitos es una rama muy activa de las matemáticas. Para obtener resultados como los de arriba, es esencial la geometría del grupo, además de involucrar técnicas modernas de matemáticas de diferentes ramas. Concluiremos con una conjetura que hasta ahora ha resistido ser probada en completa generalidad y cuya veracidad tiene consecuencias notables.

Conjetura 1. Sea G un grupo discreto que no contiene elementos de orden finito no triviales, entonces

$$Wh(G) = 0,$$

notemos que los ejemplos (1) (3) arriba satisfacen la hipótesis.

Por otro lado esperamos que grupos que tengan elementos de orden finito, en general tengan grupo de Whitehead infinitamente generado.

Referencias

- [1] C. S. Aravinda, T. Farrell and S. K. Roushon, *Algebraic K-theory of pure braid groups* (Asian J. Math. 4 (2000), no. 2, 337343).
- [2] H. Bass, A. Heller y R. Swan, *The Whitehead group of a polynomial extension* (Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. No. 22 1964 6179).
- [3] E. Berkove, D. Juan Pineda y K. Pearson, *The lower algebraic K-theory of Fuchsian groups* Comment. Math. Helv. 76 (2001), no. 2, 339352).
- [4] E. Berkove, T. Farrell, D. Juan Pineda y K. Pearson, *The Farrell-Jones isomorphism conjecture for finite covolume hyperbolic actions and the algebraic K-theory of Bianchi groups* (Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 12, 56895702).
- [5] R. Oliver, *Whitehead Groups of finite groups* (London Mathematical Society, LNS 132, Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [6] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its Applications* (Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1994).

Conjuntos de Julia racionales y empaques de Sierpiński generalizados *

Mónica Moreno Rocha †

Centro de Investigación en Matemáticas

Analizamos las aplicaciones racionales postcríticamente finitas asociadas a la familia de grado cuatro

$$z \mapsto z^2 + \lambda/z^2,$$

con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Para aquellas aplicaciones cuyos conjuntos de Julia son modelados por un empaque de Sierpiński generalizado, explicaremos un resultado de rigidez asociado a las clases de conjugación topológica por medio de sus modelos combinatorios asociados.

We study postcritically finite rational maps drawn from the family

$$z \mapsto z^2 + \lambda/z^2,$$

with $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. For those maps whose Julia sets are described by generalized Sierpiński gaskets, we explain a rigidity result of conjugacy classes by means of their associated combinatorial models.

Palabras claves: Funciones Racionales, Conjunto de Julia, Combinatoria.

Keywords: Rational Maps, Julia Sets, Combinatorics.

1. Introducción

Consideremos la familia de aplicaciones racionales de grado cuatro

$$R_\lambda(z) = z^2 + \frac{\lambda}{z^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Esta familia exhibe una amalgama de ejemplos topológicos: cuando la órbita de los puntos críticos escapa a infinito, sus conjuntos de Julia pueden ser homeomorfos a

- Conjunto de Cantor de puntos.
- Curva (o alfombra) de Sierpiński.

Estos ejemplos de conjuntos de Julia para R_λ (y su ampliación) pueden apreciarse en las Figuras 1 y 2.

Bajo ciertas condiciones sobre λ , los mapeos R_λ tienen conjuntos de Julia descritos como *empaques de Sierpiński generalizados*. Ejemplos de estos conjuntos de Julia son desplegados en las Figuras 3, 4, 6 y 7. El conjunto de la izquierda en la Figura 3

*Recibido el 4 de Junio de 2010 y aceptado el 13 de Septiembre de 2010

†**Dirección postal:** Callejón Jalisco s/n, Guanajuato, México. C.P. 36240. Tel.(+52)473 732.7155. **Correo electrónico:** mmoreno@cimat.mx

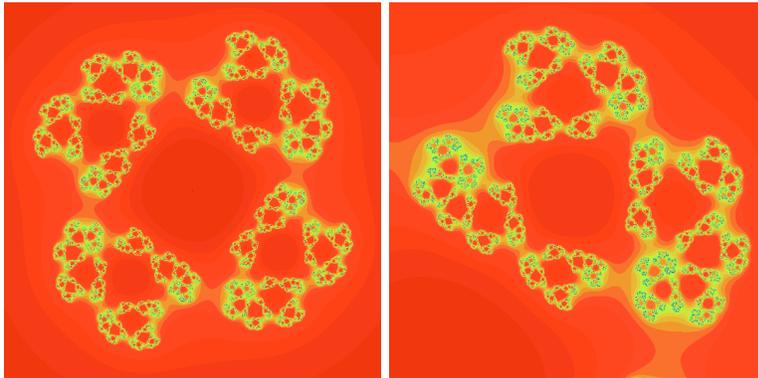


Figura 1. Conjunto de Cantor.

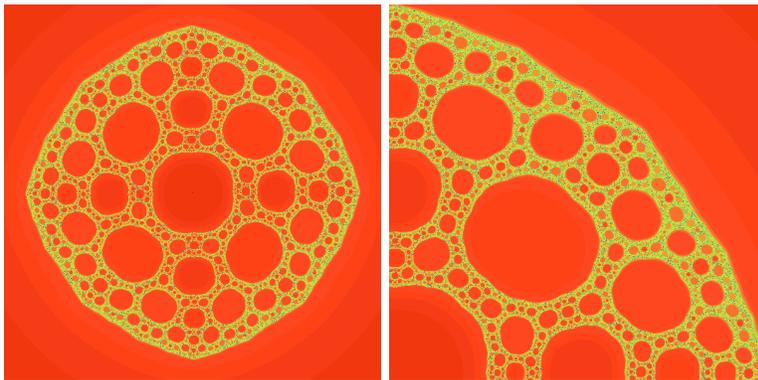


Figura 2. Curva de Sierpiński.

corresponde a la aplicación $z \mapsto z^2 + \lambda/z$ con $\lambda \approx -0.59259$. El trabajo desarrollado en [1] demuestre que éste conjunto de Julia es homeomorfo al Triángulo de Sierpiński. De aquí que los conjuntos asociados a la familia R_λ (y en general, a familias de grados mayores del tipo $z \mapsto z^n + \lambda/z^m$, con $n \geq 2, m \geq 1$, ver Figura 4) son descritos como empaques de Sierpiński generalizados.

Nuestro objetivo es presentar un resultado de rigidez asociado a aplicaciones racionales de grado 4 que son postcríticamente finitas y satisfacen ciertas condiciones adicionales. Se presentan demostraciones nuevas para algunos resultados y se describen las ideas principales del Teorema de Rigidez (Teorema 1).

En la Sección 2, analizamos las propiedades dinámicas de la familia R_λ . La definición precisa de un empaque de Sierpiński generalizado se proporciona en la Sección 3, mientras que el resultado principal se introduce en la Sección 4. En la sección final, se explica este resultado por medio de un ejemplo.

Agradecimientos: Este artículo reporta los resultados presentados en la Escuela Matemática de América Latina y el Caribe, con sede en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, del 2 al 13 de Agosto. Agradezco a los organizadores de

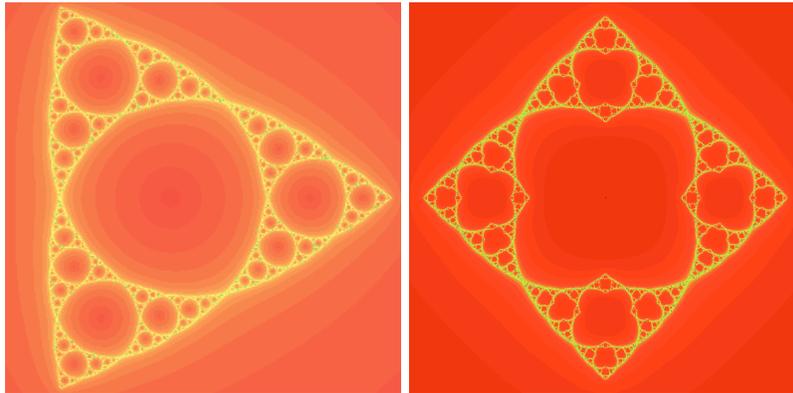


Figura 3. Empaque generalizado de grados 3 y 4.

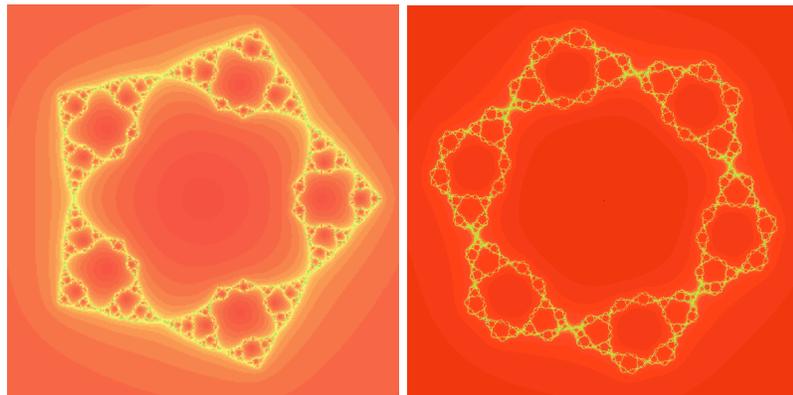


Figura 4. Empaque generalizado de grados 5 y 6.

la escuela por la invitación y su hospitalidad en lo que fue una corta pero placentera visita.

2. Propiedades de R_λ

Referimos al lector a [2] para consultar aspectos generales de la dinámica holomorfa.

Describimos las propiedades generales de la familia

$$R_\lambda(z) = z^2 + \frac{\lambda}{z^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Es fácil verificar que el punto al infinito es punto fijo superatractor, mientras que el origen es un polo de orden 2. Ambos son puntos críticos simples. Un cálculo directo nos permite ver que las soluciones de

$$z^4 - \lambda = 0, \tag{1}$$

son los 4 puntos críticos restantes. Llamamos a estas soluciones *puntos críticos libres* y notamos que todos ellos se localizan sobre la circunferencia $|z| = |\lambda|^{-4}$. Denotemos por

$$c_0 = |\lambda|^{1/4} \exp\left(\frac{i2\pi \arg(\lambda)}{4}\right),$$

y $c_1 = ic_0, c_2 = -c_0$ y $c_3 = -ic_0$ los restantes puntos críticos.

Cada R_λ exhibe una simetría rotacional: si ω es una raíz cuarta primitiva de la unidad, se tiene

$$R_\lambda(\omega^k z) = \pm R_\lambda(z),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Además, existe una *involución*: si H_λ representa una de las dos ramas de $z \mapsto \sqrt{\lambda}/z$, entonces $R_\lambda \circ H_\lambda = R_\lambda$. Observe que la raíz positiva fija los puntos c_0 y c_2 , mientras que la raíz negativa fija c_1 y c_3 .

Debido a estas simetrías, R_λ tiene esencialmente una única órbita crítica: los cuatro puntos críticos libres son enviados a dos valores críticos, $v_\pm = 2\sqrt{\lambda}$, y estos, a su vez, son enviados a $4\lambda + 1/4$. Un simple cálculo muestra $R_\lambda(c_j) = v_{\text{signo}\{(-1)^j\}}$.

La *cuenca inmediata de atracción* asociada al punto fijo superatractor $z = \infty$, denotada \mathcal{B}_λ , es el abierto conexo maximal que contiene ∞ y cuyos puntos satisfacen $R_\lambda^k(z) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Si el conjunto de Julia \mathcal{J}_λ es conexo, entonces la *cuenca de atracción* del punto al infinito, esto es,

$$\bigcup_{j \geq 0} R_\lambda^{-j}(\mathcal{B}_\lambda),$$

contiene más de una componente. En particular $R_\lambda^{-1}(\mathcal{B}_\lambda)$ consiste de dos componentes conexas, \mathcal{B}_λ y una segunda componente abierta maximal que contiene el origen, usualmente denotada por \mathcal{T}_λ . Excepto por la Figura 1, \mathcal{B}_λ es la región externa no acotada mientras que \mathcal{T}_λ es la región central acotada.

Denotemos por \mathcal{P} el conjunto de todos los parámetros λ para los cuales, los puntos críticos libres de R_λ se encuentran en la frontera de \mathcal{B}_λ y sus órbitas positivas son finitas. Las condiciones sobre los parámetros \mathcal{P} implican que las órbitas críticas libres son preperiódicas a puntos periódicos repulsores localizados en $\partial\mathcal{B}_\lambda$. A partir de estas ideas, es posible demostrar el siguiente resultado (consultar [1] para mayores detalles).

Proposición 1. El conjunto \mathcal{P} es denso en la frontera del lugar de conexidad de R_λ .

3. Empaques generalizados

Para describir un empaque de Sierpiński generalizado, fijamos $N \geq 3$ y denotemos por Δ el disco unitario cerrado, P el interior de una región poligonal donde ∂P la unión de N curvas simples y disjuntas de $\partial\Delta$ salvo por N vértices localizados en la frontera de Δ .

Sea $X_1 = \Delta - P$. Claramente, X_1 puede escribirse como la unión de N discos topológicos Δ_j . Al elegir N puntos distintos sobre cada $\partial\Delta_j$, podemos repetir el proceso de remover una región rectangular abierta con las mismas condiciones de frontera, de tal forma que $X_2 = \bigcup_j (\Delta_j - P)$ es la unión de N^2 discos topológicos.

Podemos repetir el proceso de tal forma que, en el paso k , X_k consiste de la unión de N^k discos topológicos.

Denotemos por X_∞ el conjunto límite de éste proceso iterativo. Para añadirle regularidad a la construcción, imponemos las siguientes condiciones sobre cada X_k .

Condición S: X_k tiene una simetría N -rotacional.

Condición V: Para todo $k \geq 2$ y $U \subset X_{k-1}$ disco topológico, existe un entero $0 < m < N$ tal que $U - P$ es un disco de X_k si y sólo si P tiene exactamente m vértices sobre la frontera de un polígono previamente removido en la construcción de X_{k-1} .

Observación 1. La condición **V** restringe la posición de m vértices de la región poligonal P . Sin embargo, los restantes $N - m$ vértices pueden localizarse en los arcos de la frontera de $U - \bar{P}$. El teorema de rigidez se basa en analizar las posibles configuraciones que estos vértices pueden realizar.

En la Figura 5 se muestra para $N = 4$ y $m = 2$ un conjunto X_2 que satisface las condiciones **S** y **V**, mientras que a la derecha, el conjunto X_2 no satisface ninguna de las condiciones.

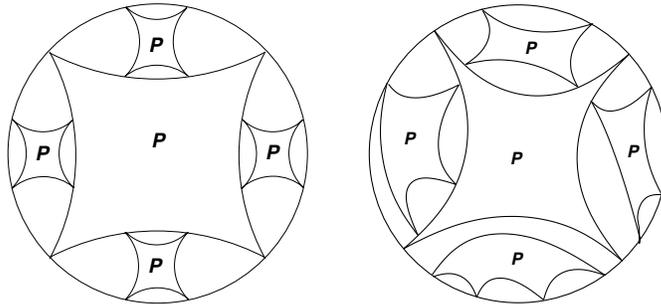


Figura 5.

Definición 1. Decimos que X_∞ es un *empaquetamiento generalizado de Sierpiński* si X_∞ es el conjunto límite del proceso descrito anteriormente y para cada $k \geq 2$, X_k satisface las condiciones **S** y **V** con $N \geq 3$ y $0 < m < N$ fijos.

Observación 2. El Triángulo de Sierpiński satisface la definición de empaquetamiento generalizado si P es una región triangular, con $N = 3$, $m = 1$. Para la familia R_λ , nos interesa analizar los empaquetamientos generalizados con $N = 4$ y $m = 2$.

Teorema 1. Para todo parámetro $\lambda \in \mathcal{P}$, el conjunto de Julia de R_λ es homeomorfo a empaquetamiento generalizado de Sierpiński.

Este teorema se basa en el siguiente lema, para el cual damos una demostración alterna a la que se encuentra en [1].

Lema 1. Si $\lambda \in \mathcal{P}$, entonces $\partial\mathcal{B}_\lambda \cap \partial\mathcal{T}_\lambda = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$.

Prueba. Por definición del conjunto \mathcal{P} , los puntos críticos libres de R_λ están sobre la frontera de \mathcal{B}_λ . Si c representa uno de estos puntos críticos y D un disco abierto suficientemente pequeño alrededor de c (de tal forma que no contenga otro punto crítico), entonces R_λ envía D sobre su imagen 2-a-1. Ya que cada punto $w \in \mathcal{B}_\lambda \cap R_\lambda(D)$ tienen una preimagen $z \in \mathcal{B}_\lambda \cap D$, si H_λ es la involución que fija c , podemos elegir w de tal forma que $H_\lambda(z) \in D \cap \mathcal{T}_\lambda$. Tomando una sucesión de puntos $w \in \mathcal{B}_\lambda \cap R_\lambda(D)$ que converjan a $R_\lambda(c)$, obtenemos una sucesión en \mathcal{B}_λ y otra en \mathcal{T}_λ que convergen a c . Por lo tanto $c \in \partial\mathcal{B}_\lambda \cap \partial\mathcal{T}_\lambda$. Por la 4-simetría, concluimos el resultado. ■

Prueba. (Demostración del Teorema 1) Explicamos las ideas principales en la demostración, mayores detalles pueden consultarse en [1].

Ya que $z = \infty$ es un punto fijo superatractor, el Teorema de Böttcher nos permite encontrar curvas γ_j que unen el punto al infinito con el punto crítico c_j . Denotemos por η_j la imagen de γ_j bajo la involución apropiada, de tal forma que η_j une el origen con c_j . Por el Lemma 1, estas curvas pueden elegirse de tal forma que sólo intersecten \mathcal{J}_λ en los puntos críticos.

El conjunto $\bigcup_j(\gamma_j \cup \eta_j)$ separan el plano complejo en cuatro sectores S_0, \dots, S_3 rotacionalmente simétricos. La indexación de los sectores se realiza de tal forma que S_0 contiene el único punto fijo repulsor $p_\lambda \in \partial\mathcal{B}_\lambda$. La unicidad de p_λ se debe a la conjugación de R_λ con $z \mapsto z^2$, la cual puede extenderse a la frontera de la cuenca inmediata por ser R_λ postcríticamente finita, [2].

Por construcción, el interior de cada sector S_j es enviado inyectivamente a todo el plano complejo menos las curvas $R_\lambda(\gamma_{j-1}) \cup R_\lambda(\gamma_j)$ que conectan $v_\pm \in \partial\mathcal{B}_\lambda$ con el punto al infinito. Esto implica que cada S_j contiene una de las cuatro componentes de $R_\lambda^{-1}(\overline{\mathcal{T}_\lambda})$ en su interior. En particular, las componentes de $\partial\mathcal{B}_\lambda \cup \partial\mathcal{T}_\lambda$ en cada S_j son enviadas inyectivamente a toda $\partial\mathcal{B}_\lambda$. Esto implica que la componente $U \subset S_j$ que satisface $R_\lambda(U) = \overline{\mathcal{T}_\lambda}$, tiene dos vértices en $\partial\mathcal{T}_\lambda \cap S_j$ y dos vértices en $\partial\mathcal{B}_\lambda \cap S_j$. Esto implica que \mathcal{J}_λ satisface la condición **V** con $m = 2$. La condición **S** es obvia.

Finalmente, tomando $K_0 = \widehat{\mathbb{C}} - \mathcal{B}_\lambda$, $K_1 = K_0 - \mathcal{T}_\lambda$ y $K_{n+1} = K_n - R_\lambda^{-n}(\mathcal{T}_\lambda)$, se obtiene

$$\mathcal{J}_\lambda = \bigcap_{n \geq 0} K_n,$$

es un conjunto compacto y conexo que satisface ambas condiciones de un empaque generalizado. ■

4. Rigidez

El resultado principal del artículo [1] puede enunciarse de la siguiente forma.

Teorema 2. Para cualesquier par de parámetros $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, R_λ y R_μ son topológicamente conjugados en sus respectivos conjuntos de Julia si y sólo si $\mu = \lambda$ o $\mu = \bar{\lambda}$.

La demostración de este resultado se basa en las siguientes ideas: primero, el conjunto de los puntos críticos libres $C_\lambda = \{c_0, \dots, c_3\}$ forman un *conjunto de 4-disconexión*, esto es, $\mathcal{J}_\lambda - C_\lambda$ consiste de cuatro componentes conexas. Más aún, c es el único subconjunto de \mathcal{J}_λ con dicha propiedad.

Por otro lado, supongamos que existe un homeomorfismo $h : \mathcal{J}_\lambda \rightarrow \mathcal{J}_\mu$ que preserva orientación y conjuga la dinámica de R_λ y R_μ sobre sus conjuntos de Julia. Por su unicidad, $h(p_\lambda) = p_\mu$. Claramente, h debe preservar los conjuntos de puntos críticos libres C_λ y C_μ , y como preserva orientación, se sigue $C_\lambda \ni c_j \mapsto c_j \in C_\mu$.

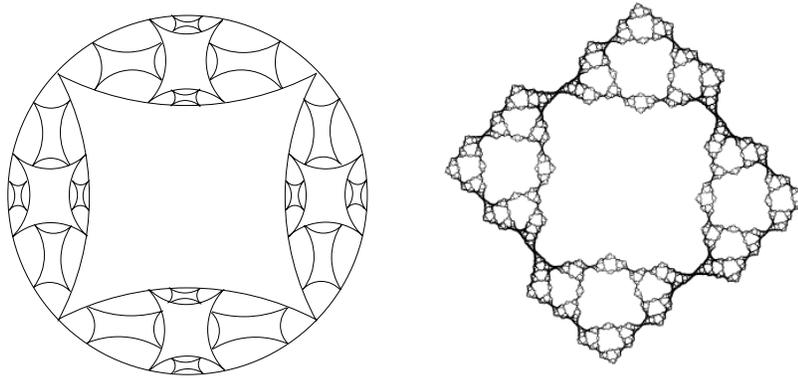


Figura 6. Representación esquemática de \mathbb{J}_μ^3 a la izquierda y \mathcal{J}_μ para cierto $\mu \in \mathcal{P}$.

Como R_λ y R_μ son postcríticamente finitas, $\partial\mathcal{B}_\lambda$ y todas sus preimágenes son curvas simples cerradas. De aquí que podamos construir un modelo topológico asociado al *esqueleto* de cada conjunto de Julia. El esqueleto de \mathcal{J}_λ se define como

$$\mathbb{J}_\lambda := \bigcup_{k \geq 0} R_\lambda^{-k}(\partial\mathcal{B}_\lambda),$$

mientras que el esqueleto de orden n está dado por el conjunto

$$\mathbb{J}_\lambda^n := \bigcup_{k=0}^n R_\lambda^{-k}(\partial\mathcal{B}_\lambda).$$

Ver Figura 6, donde $\mu \approx -0.246 + i0.15913$.

La demostración del teorema se basa en restringir el homeomorfismo a los esqueletos de orden $k = 0, 1, 2, \dots$. Si $\mu \neq \lambda$ (o $\mu \neq \bar{\lambda}$ en el caso de un homeomorfismo que invierte orientación) entonces existirá un orden k_* para el cual h no puede extenderse a todos los esqueletos de órdenes $j \geq k_*$.

5. Ejemplos

Para trabajar con el modelo combinatorio asociado a los esqueletos, es necesario definir los itinerarios de las órbitas críticas de R_λ .

Definición 2. Un punto $z \in \mathbb{J}_\lambda - C_\lambda$ tiene *itinerario* $s_0 s_1 s_2 \dots$ con $s_j = k$ si y sólo si

$$R_\lambda^j(z) \in S_k, \text{ para cada } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Por simetrías, hemos visto que existe esencialmente una única órbita crítica después de dos iteraciones. Elegimos pues definir el *itinerario crítico* de λ como el itinerario asociado a $R_\lambda^2(c_j) = 4\lambda + 1/4$.

Veamos un ejemplo particular en donde los itinerarios y los esqueletos asociados a ciertos valores de λ y μ difieren en un nivel $k_* = 4$.

Supongamos $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ tales que

- El itinerario de $4\lambda + 1/4$ es 111312 $\bar{0}$. En este caso, $\lambda \approx -0.12713 + i0.2138$.
- El itinerario de $4\mu + 1/4$ es 11232 $\bar{0}$. El parámetro μ es el asociado a la Figura 6.

Esta combinatoria determina la estructura de los esqueletos \mathbb{J}_λ y \mathbb{J}_μ . Efectivamente, los itinerarios críticos determinan la configuración de los vértices de cada esqueleto como lo muestran las Figuras 6 y 7. Observe que hasta el orden 2, los esqueletos son los mismos, pero la configuración de los vértices de componentes en $R_\lambda^{-3}(\bar{\mathcal{B}}_\lambda)$ son distintas a las configuraciones en \mathbb{J}_μ .

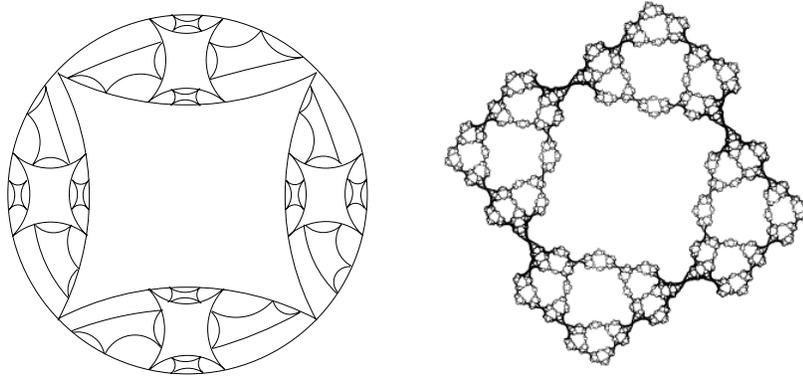


Figura 7. Representación esquemática de \mathbb{J}_λ^3 a la izquierda y \mathcal{J}_λ para cierto $\lambda \in \mathcal{P}$.

Debido a que $h : \mathbb{J}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{J}_\mu^2$ no puede extenderse a órdenes mayores, no puede existir un homeomorfismo que conjuge las dinámicas de las aplicaciones cuando se restringen a los conjuntos de Julia.

Referencias

- [1] R. L. Devaney, M. Moreno Rocha & S. Seigmund, *Rational maps with generalized Sierpiński gasket Julia sets*, Topol. and Appl. **154** (2007) 11–27.
- [2] J. Milnor, *Complex dynamics on the Riemann sphere* (Princeton University Press, Princeton New Jersey, 2006).

Métodos algebraicos para códigos parametrizados por monomios *

Eliseo Sarmiento, Rafael H. Villarreal †

Departamento de Matemáticas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,

Carlos Rentería ‡

Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Física y Matemáticas

Aron Simis §

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco

Maria Vaz Pinto ¶

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

Sea K un campo finito y sea X un subconjunto de un espacio proyectivo \mathbb{P}^{s-1} , sobre el campo K , el cual es parametrizado por monomios. Se define la clase de *códigos lineales parametrizados* asociados a X y se presentan métodos algebraicos para calcular sus *parámetros* básicos (dimensión, longitud, y distancia mínima). Usaremos herramientas de álgebra conmutativa, campos finitos, y grupos, para estudiar la estructura del ideal $I(X) \subset S := K[t_1, \dots, t_s]$ generado por los polinomios homogéneos de S que se anulan en X . Estudiaremos la relación entre los *parámetros* básicos de un código y los *invariantes algebraicos* del anillo $S/I(X)$.

Let K be a finite field with and let X be a subset of a projective space \mathbb{P}^{s-1} , over the field K , which is parameterized by monomials. We introduce the class of *parameterized linear codes* arising from X and present algebraic methods to compute and study its basic *parameters* (dimension, length and minimum distance). We use tools from commutative algebra, finite fields, and groups, in order to study the structure of the ideal $I(X) \subset S := K[t_1, \dots, t_s]$ generated by the homogeneous polynomials of S that vanish on X . We study the relation between the basic *parameters* of a code and the *algebraic invariants* of the ring $S/I(X)$.

Palabras claves: Código lineal, parámetros básicos, invariantes algebraicos.

Keywords: Linear code, basic parameters, algebraic invariants.

1. Introducción

Sea $K = \mathbb{F}_q$ un campo finito con q elementos. El *espacio proyectivo* de dimensión $s - 1$ sobre K es el espacio cociente

$$\mathbb{P}^{s-1} := (K^s \setminus \{0\}) / \sim$$

*Recibido el 23 de Junio de 2010 y aceptado el 10 de Septiembre de 2010

†**Dirección postal:** Apartado Postal 14-740, 07000, México, D.F. *Ayudado por Proyecto CONA-CyT 49251-F y SNI*

‡**Dirección postal:** Instituto Politécnico Nacional, 07300, México, D.F. *Ayudado por COFAA-IPN y SNI.*

§**Dirección postal:** 0740-540 Recife, Pe, Brazil *Ayudado por CNPq.*

¶**Dirección postal:** Avenida Rovisco Pais, 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

donde dos puntos α, β en $K^s \setminus \{0\}$ son equivalentes si $\alpha = \lambda\beta$ para algún $\lambda \in K$. Denotamos la *clase de equivalencia* de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ por $[\alpha] = [(\alpha_1, \dots, \alpha_s)]$.

Sea $x^{v_i} := x_1^{v_{i1}} \cdots x_n^{v_{in}}, i = 1, \dots, s$, un conjunto finito de monomios en el anillo de polinomios $R = K[x_1, \dots, x_n]$ con coeficientes en K , donde $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}) \in \mathbb{N}^n$ para $1 \leq i \leq s$. El conjunto

$$X := \{[(x^{v_1}, \dots, x^{v_s})] \mid x_i \in K^* = K \setminus \{0\} \forall i\} \subset \mathbb{P}^{s-1},$$

es llamado un *conjunto parametrizado* por x^{v_1}, \dots, x^{v_s} .

Un ejemplo de un conjunto parametrizado es el *Toro Proyectivo* definido de la siguiente forma:

$$\mathbb{T} := \{[(x_1, \dots, x_s)] \mid x_i \in K^* \text{ para todo } i\} \subset \mathbb{P}^{s-1}.$$

Sea $S = K[t_1, \dots, t_s]$ un anillo de polinomios con la graduación estándar

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

inducida por $\text{grado}(t_i) = 1$ para todo i . El *ideal anulador* de X es el ideal $I(X) \subset S$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en X . A $S/I(X)$ se le llama el anillo homogéneo de coordenadas del conjunto X .

Definición 1. La *función de Hilbert* de $S/I(X)$ se define como:

$$H_X: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$H_X(d) := \dim_K S_d/I(X)_d.$$

Teorema 1 ([6]) El anillo coordenado y la función de Hilbert cumplen las siguiente propiedades.

- El anillo coordenado $S/I(X)$ es Cohen-Macaulay y $\dim S/I(X) = 1$.
- $H_X(d) = |X|$ para $d \geq |X| - 1$, luego el *polinomio de Hilbert* es constante.
- $|X|$ es igual al *grado* de $S/I(X)$.

2. Códigos lineales que provienen de X

Definición 2. Un *código lineal* es un subespacio lineal de K^m

Sea $X = \{[P_1], \dots, [P_m]\}$ y sea $f_0(t_1, \dots, t_s) = t_1^d$, donde $d \geq 1$. La función lineal de K -espacios vectoriales:

$$\text{ev}_d: K[t_1, \dots, t_s]_d \rightarrow K^{|X|}, \quad f \mapsto \left(\frac{f(P_1)}{f_0(P_1)}, \dots, \frac{f(P_m)}{f_0(P_m)} \right)$$

es llamada una *función de evaluación*. Es fácil ver que la imagen de ev_d , denotada por $C_X(d)$, es un *código lineal*. En este caso $C_X(d)$ es llamado un *código parametrizado* de orden d .

Los *parámetros básicos* de un código lineal son:

1. $\dim_K C_X(d)$, la *dimensión* de $C_X(d)$
2. $|X|$, la *longitud* de $C_X(d)$
3. $\delta_d := \min\{\|v\| : 0 \neq v \in C_X(d)\}$, la *distancia mínima* de $C_X(d)$, donde $\|v\|$ es el número de entradas no-cero de v .

Note que el núcleo de ev_d es precisamente $I(X)_d$. Luego existe un isomorfismo de K -espacios vectoriales tal que

$$S_d/I(X)_d \simeq C_X(d).$$

Así podemos concluir que $\dim_K C_X(d)$ es igual a $H_X(d) = \dim(S_d/I(X)_d)$ y que la longitud de $C_X(d)$ es igual a $\text{grado}(S/I(X)) = |X|$.

Teorema 2. (Cota de Singleton) Los parámetros básicos de $C_X(d)$ están relacionados por:

$$1 \leq \delta_d \leq |X| - H_X(d) + 1.$$

Definición 3. Si la igualdad se cumple en la cota de Singleton el código lineal se llama MDS (Máxima Distancia Separable).

Por sus implicaciones en la transmisión de información, un buen código parametrizado $C_X(d)$ debe de tener $|X|$, $H_X(d)/|X|$ y $\delta_d/|X|$ lo más grande posible. En este sentido la familia de códigos MDS es una buena familia de códigos lineales.

Observación 3 (Geramita, Kreuzer, Robbiano, TAMS, 1993) Existe un entero $r \geq 0$ tal que $1 = H_X(0) < H_X(1) < \dots < H_X(r-1) < H_X(d) = |X|$ para $d \geq r$.

Definición 4. El *índice de regularidad* de $S/I(X)$, denotado por $\text{reg}(S/I(X))$, es el menor entero $r \geq 0$ tal que $H_X(d) = |X|$ para $d \geq r$.

El grado y el índice de regularidad de $S/I(X)$ se pueden calcular por medio de la serie de Hilbert como se explica enseguida.

Teorema 4 (Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Adv. Math., 1978) El anillo $S/I(X)$ es una álgebra estándar Cohen-Macaulay de dimensión 1. Por lo tanto la serie de Hilbert de $S/I(X)$ puede escribirse como

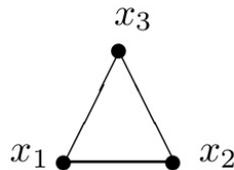
$$F_X(t) := \sum_{i=0}^{\infty} H_X(i)t^i = \frac{h_0 + h_1t + \dots + h_rt^r}{1-t},$$

donde h_0, \dots, h_r son enteros positivos.

- $r = \text{reg}(S/I(X))$.
- $\text{grado}S/I(X) = h_0 + \dots + h_r = |X|$.
- El número $\text{reg}(S/I(X)) - 1$ se llama el *a-invariante*.
- El vector (h_0, h_1, \dots, h_r) se llama el *h-vector*.
- $h_i = \dim_K(S/(I(X), t_s)_i)$ para todo i .

En especial nos interesa estudiar el caso cuando X proviene de una gráfica:

Ejemplo 5. Sean $K = \mathbb{F}_3$ y $X = \{(x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3) \mid x_i \in K^*\}$ el conjunto parametrizado por las aristas de la gráfica:



- (i) $I(X) = (t_1^2 - t_3^2, t_2^2 - t_3^2)$.
- (ii) La serie de Hilbert es $F_X(t) = \frac{1+2t+t^2}{(1-t)}$.
- (iii) $\text{reg}(S/I(X)) = 2$ y $\text{grado}(S/I(X)) = 4$.
- (iv) La función de Hilbert queda dada por

$$\frac{d}{H_X(d)} \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & d \geq 2 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}.$$

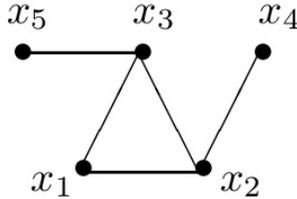
Observación 6 ([14]) Los siguientes resultados nos muestran el comportamiento de la distancia mínima.

- Si $\delta_d > 1$ (resp. $\delta_d = 1$), entonces $\delta_d > \delta_{d+1}$ (resp. $\delta_{d+1} = 1$)
- $\delta_d = 1$ para $d \geq \text{reg}(S/I(X))$

Ejemplo 7. (Parámetros básicos de $C_X(d)$ cuando $K = \mathbb{F}_2$)

- $X = \{(1, \dots, 1)\} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ y $|X| = 1$,
- $I(X) = (t_1 - t_s, t_2 - t_s, \dots, t_{s-1} - t_s)$,
- $F_X(t) = 1/(1-t)$, $a(S/I(X)) = -1$ y $\text{reg}(S/I(X)) = 0$,
- $H_X(d) = 1$ y $\delta_d = 1$ para todo $d \geq 1$,
- La dimensión, longitud, y distancia mínima de $C_X(d)$ son todas iguales a 1 para todo $d \geq 1$.

Ejemplo 8. Sea $K = \mathbb{F}_3$ y $X = \{(x_2x_4, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3x_5) \mid x_i \in K^*\}$ el conjunto parametrizado por las aristas de la gráfica:



$$X = \{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, -1), (1, -1, -1, -1, -1), (1, -1, -1, -1, 1), (1, 1, -1, -1, -1), (1, 1, -1, -1, 1), (1, -1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1, -1), (1, 1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1, 1), (1, -1, 1, -1, -1), (1, 1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1, 1)\}.$$

d	Distancia Mínima	Polinomio con el que se alcanza
1	8	$t_1 + t_2$

3. El caso $X = \mathbb{T} \subset \mathbb{P}^{s-1}$

Sea $X = \mathbb{T} = \{(x_1, \dots, x_s) \mid x_i \in K^* \text{ para todo } i\} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. En este caso $C_X(d)$ se llama un código *Reed-Solomon* generalizado. Una pregunta natural es ¿Cuales son los parámetros de $C_X(d)$? La respuesta se da con los siguientes teoremas.

Teorema 9. Si $X = \mathbb{T}$, entonces la longitud de $C_X(d)$ es $|X| = (q - 1)^{s-1}$.

Proposición 10 (Gonzalez, Renteria, Hernández de la Torre, Congr. Numer., 2003) Si $X = \mathbb{T}$, entonces

$$I(\mathbb{T}) = (\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s).$$

Corolario 11. Si $X = \mathbb{T}$, entonces la serie de Hilbert de $S/I(X)$ es:

$$F_X(t) = \frac{(1 - t^{q-1})^{s-1}}{(1 - t)^s} = \frac{(1 + t + \dots + t^{q-2})^{s-1}}{1 - t}$$

por lo tanto la *dimensión* de $C_X(d)$ está dada por

$$H_X(d) = \binom{s-1+d}{d} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{d}{q-1} \rfloor} (-1)^i \binom{s-1}{i} \binom{s-1+d-i(q-1)}{s-1}$$

y el índice de regularidad es $\text{reg}(S/I(X)) = (s - 1)(q - 2)$.

Observación 12. Por la cota de Singleton obtenemos:

$$1 \leq \delta_d \leq |X| - H_X(d) + 1 = 1 \text{ para } d \geq \text{reg}(S/I(X))$$

por lo tanto $\delta_d = 1$ para $d \geq (s-1)(q-2)$.

Teorema 13 (Sarmiento, Vaz Pinto, Villarreal, 2010) Si $X = \mathbb{T}$ y $1 \leq d = k(q-2) + \ell$ con $1 \leq \ell \leq q-2$ y $k \geq 0$, entonces la *distancia mínima* es:

$$\delta_d = \begin{cases} (q-1)^{s-(k+2)}(q-1-\ell) & \text{si } d \leq (q-2)(s-1) - 1, \\ 1 & \text{si } d \geq (q-2)(s-1). \end{cases}$$

Para probar el teorema anterior necesitamos el siguiente lema que acota las raíces de ciertos polinomios en S .

Lema 14. Sea $G \in S$ un polinomio de grado $d \geq 1$ tal que $\text{grado}_{t_i}(G) \leq q-2$ para $i = 1, \dots, s$ y sea

$$Z_G = \{x \in (K^*)^s \mid G(x) = 0\}.$$

Si $d = k(q-2) + \ell$ con $1 \leq \ell \leq q-2$, $0 \leq k \leq s-1$, entonces

$$|Z_G| \leq (q-1)^{s-k-1}((q-1)^{k+1} - (q-1) + \ell).$$

Antes del teorema anterior existieron algunas aproximaciones como las siguientes.

Corolario 15 (Stichtenoth, Algebraic Functions Fields and Codes, Springer, 1993, p. 42) Si $X = \mathbb{T} \subset \mathbb{P}^1$, i.e., $s = 2$, entonces

$$\delta_d = \begin{cases} q-1-d & \text{si } 1 \leq d \leq q-3, \\ 1 & \text{si } d \geq q-2. \end{cases}$$

Corolario 16. Si $X = \mathbb{T} \subset \mathbb{P}^1$, i.e., $s = 2$, entonces

$$H_X(d) = \begin{cases} d+1 & \text{si } 1 \leq d \leq q-2, \\ q-1 & \text{si } d \geq q-1. \end{cases}$$

y $\delta_d = |X| - H_X(d) + 1 = (q-1) - (d+1) + 1$ si $1 \leq d \leq q-2$, i.e., $C_X(d)$ es un código MDS.

Corolario 17 (Gonzalez, Rentería, Hernández de la Torre, Congr. Numer., 2003) Si $X = \mathbb{T} \subset \mathbb{P}^2$, i.e., $s = 3$, entonces

$$\delta_d = \begin{cases} (q-1)(q-1-d) & \text{si } 1 \leq d \leq (q-2), \\ 2q-d-3 & \text{si } q-1 \leq d \leq 2(q-2) - 1, \\ 1 & \text{si } d \geq 2(q-2). \end{cases}$$

4. La estructura de $I(X)$

Abordemos el problema de cómo calcular el ideal $I(X)$ en casos más generales.

Observación 18. El ideal $I(X)$ se puede expresar como:

$$I(X) = \bigcap_{[\alpha] \in X} I_{[\alpha]}$$

donde $I_{[\alpha]} = (\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1, \alpha_1 t_3 - \alpha_3 t_1, \dots, \alpha_1 t_s - \alpha_s t_1)$ es el ideal generado por los polinomios homogéneos de S que se anulan en $[\alpha] = [(\alpha_1, \dots, \alpha_s)]$.

Definición 5. Un ideal generado por polinomios de la forma $t^a - t^b$, con $a, b \in \mathbb{N}^s$, es llamado un *ideal binomial* de S .

El siguiente teorema de estructura permite calcular la dimensión y longitud de $C_X(d)$.

Teorema 19 (Rentería, Simis, Villarreal, 2009)

- (a) $I(X) = (\{t_i - x^{m_i} z\}_{i=1}^s \cup \{x_i^{q-1} - 1\}_{i=1}^n) \cap S$.
- (b) $I(X)$ es un ideal binomial.
- (c) $t_i \notin \mathcal{Z}_S(S/I(X))$ para todo i .
- (d) $I(X) = (\{t^a - t^b \mid a, b \in \mathbb{N}^s \text{ con } a - b \in \mathcal{L}\})$ para algún subgrupo aditivo \mathcal{L} de \mathbb{Z}^s . Esto significa que $I(X)$ es un *ideal reticular*.

La siguiente definición de saturación de un ideal por un polinomio será fundamental para determinar $I(X)$.

Definición 6. Sea $I \subset S$ un ideal y $h \in S$ un polinomio, la *saturación* de I con respecto a h es el ideal

$$(I : h^\infty) := \{f \in S \mid fh^m \in I \text{ para algún } m \geq 1\}.$$

Definición 7. Sea $v'_i := (v_i, 1)$ y sea $\mathcal{B} := \{v'_1, \dots, v'_s\}$. El *ideal tórico* de \mathcal{B} es el ideal primo de $S = K[t_1, \dots, t_s]$ dado por:

$$I_{\mathcal{B}} = (t^a - t^b \mid a = (a_i), b = (b_i) \in \mathbb{N}^s, \sum_i a_i v'_i = \sum_i b_i v'_i).$$

Además diremos que \mathcal{B} es homogéneo si existe $v \in \mathbb{Q}^n$ tal que $\langle v'_i, v \rangle = 1$ para todo i . Si \mathcal{B} es homogéneo, entonces $I_{\mathcal{B}}$ es un ideal homogéneo.

Teorema 20 (Rentería, Simis, Villarreal, 2009) Sea $\mathcal{B} = \{(v_1, 1), \dots, (v_s, 1)\}$. Entonces

- (a) $(I_{\mathcal{B}} + (\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s)) : (t_1 \cdots t_s)^\infty \subset I(X)$
- (b) Igualdad ocurre en (a) si y sólo si $q - 1 \notin \mathcal{Z}(\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}\mathcal{B})$.
- (c) Igualdad ocurre en (a) si y sólo si $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}\mathcal{B}$ es libre de torsión, o bien $q \not\equiv 1 \pmod{p_i}$ para todo i , donde p_1, \dots, p_m son los números primos que ocurren en los divisores elementales de $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}\mathcal{B}$.

Ejemplo 21. Sea X el conjunto parametrizado por los monomios x^{v_1}, \dots, x^{v_6} , donde los v_i 's son:

$$v_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 0, 0, 0), v_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0), \\ v_4 = (0, 0, 0, 1, 1, 0), v_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 1), v_6 = (0, 0, 0, 1, 0, 1).$$

- $\mathbb{Z}^7 / \mathbb{Z}\mathcal{B} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.
- Si $|K| = q = 2^m$, entonces $q \not\equiv 1 \pmod{2}$ y $I_{\mathcal{B}} = 0$. Así

$$((\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^6): (t_1 \cdots t_s)^\infty) = I(X)$$

El lado izquierdo es igual a $(\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^6)$

- Si $|K| = q = 3$, entonces $q \equiv 1 \pmod{2}$ y $I_{\mathcal{B}} = 0$. Así

$$((\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^6): (t_1 \cdots t_s)^\infty) \neq I(X)$$

Gracias al teorema anterior también se puede calcular el ideal asociado al toro proyectivo.

Corolario 22. Si $X = \mathbb{T} \subset \mathbb{P}^{s-1}$, entonces $I(\mathbb{T}) = (\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s)$.

Demostración 1. $\mathbb{T} = \{(x_1, \dots, x_s) \mid x_i \in K^* \text{ para todo } i\}$. Observe que $x_i = x^{v_i}$, donde $v_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es el i -ésimo vector canónico. Entonces

$$\mathbb{Z}^{s+1} / \mathbb{Z}\mathcal{B} \simeq \mathbb{Z},$$

donde $\mathcal{B} = \{(v_i, 1)\}_{i=1}^s$. Así $\mathbb{Z}^{s+1} / \mathbb{Z}\mathcal{B}$ es libre de torsión. Por lo tanto

$$(\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s) = ((\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s): (t_1 \cdots t_s)^\infty) = I(\mathbb{T})$$

También podemos calcular el ideal asociado a gráficas conexas.

Corolario 23. Sea G una gráfica conexa con vertices x_1, \dots, x_n y sea x^{v_1}, \dots, x^{v_s} el conjunto de todos los monomios $x_i x_j$ tal que $\{x_i, x_j\}$ es una arista de G . Entonces se cumple la igualdad:

$$(I_{\mathcal{B}} + (\{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s)): (t_1 \cdots t_s)^\infty = I(X)$$

donde $\mathcal{B} := \{v'_1, \dots, v'_s\}$ y $v'_i := (v_i, 1)$.

Observación 24. Si $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_s\}$ es homogéneo, entonces $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{B}}$.

5. El grado de $S/I(X)$

Existen métodos, basados en programación entera, para calcular el grado de $S/I(X)$. A continuación presentaremos una forma diferente de abordar dicho problema.

Observación 25. Note que X es un grupo multiplicativo. Sea $\mathbb{T}^* = (K^*)^n$ un toro afín de dimensión n . Podemos definir un epimorfismo de grupos multiplicativos

$$\theta: \mathbb{T}^* \longrightarrow X; \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto [(x^{v_1}, \dots, x^{v_s})].$$

Por lo tanto

$$\square \mathbb{T}^*/\ker(\theta) \simeq X \implies |\mathbb{T}^*| = (q-1)^n = |X||\ker(\theta)|.$$

Luego calcular $|X|$ equivale a calcular $|\ker(\theta)|$.

Como vimos anteriormente el núcleo de θ es de suma utilidad, por lo que en el siguiente lema se describen sus elementos para luego calcularlos.

Lema 26. Sea A una matriz con vectores columna v_1, \dots, v_s . Sea $(x_i) = (\beta^{\ell_1}, \dots, \beta^{\ell_n}) \in \mathbb{T}^*$ con β un generador de K^* y $0 \leq \ell_i \leq q-2$ para todo i . Entonces $(x_i) \in \ker(\theta)$ si y sólo si existen enteros únicos $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_s \geq 0, \mu$ tal que $\ell A = (q-1)\lambda + \mu \mathbf{1}$; $0 \leq \mu \leq q-2$;

$$\ell = (\ell_i); \lambda = (\lambda_i); \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$$

Proposición 27. La función $\beta^\ell \mapsto (\ell, \lambda, \mu)$ da una biyección entre $\ker(\theta)$ y los puntos enteros del politopo

$$\mathcal{P} = \{(\ell, \lambda, \mu) \mid \ell A = (q-1)\lambda + \mu \mathbf{1}; 0 \leq \ell_i \leq q-2 \forall i; 0 \leq \mu \leq q-2\}.$$

Así el número de vectores enteros de \mathcal{P} es igual $|\ker(\theta)|$.

Ejemplo 28. Se calcula $\ker(\theta)$ y el grado de $S/I(X)$, cuando X es el conjunto parametrizado por los monomios x^{v_1}, \dots, x^{v_4} , donde los v_i 's son:

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1), v_4 = (1, 0, 0, 1)$$

Si $|K| = 5$, el politopo \mathcal{P} tiene 16 vectores enteros y $\ker(\theta)$ es igual a

$$\begin{aligned} &(\beta^0, \beta^0, \beta^0, \beta^0), (\beta^0, \beta^1, \beta^0, \beta^1), (\beta^0, \beta^2, \beta^0, \beta^2), (\beta^0, \beta^3, \beta^0, \beta^3), \\ &(\beta^1, \beta^0, \beta^1, \beta^0), (\beta^1, \beta^1, \beta^1, \beta^1), (\beta^1, \beta^2, \beta^1, \beta^2), (\beta^1, \beta^3, \beta^1, \beta^3), \\ &(\beta^2, \beta^0, \beta^2, \beta^0), (\beta^2, \beta^1, \beta^2, \beta^1), (\beta^2, \beta^2, \beta^2, \beta^2), (\beta^2, \beta^3, \beta^2, \beta^3), \\ &(\beta^3, \beta^0, \beta^3, \beta^0), (\beta^3, \beta^1, \beta^3, \beta^1), (\beta^3, \beta^2, \beta^3, \beta^2), (\beta^3, \beta^3, \beta^3, \beta^3). \end{aligned}$$

Entonces: $4^4 = (q-1)^n = |X||\ker(\theta)| = |X|16$, por lo tanto $|X| = 16$.

Definición 8. Un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ se llama una *base de Hilbert* si $\mathbb{N}\mathcal{B} = \mathbb{R}_+\mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$.

Lema 29. Sea $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Entonces \mathcal{B}' es una base de Hilbert si y sólo si $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}\mathcal{B}'$ es libre de torsion.

Teorema 30 (Rentería, Simis, Villarreal, 2009) Sea $\mathcal{B} = \{(v_1, 1), \dots, (v_s, 1)\}$ y sea $r = \text{rank}(\mathbb{Z}\mathcal{B})$. Si \mathcal{B} es una base de Hilbert, entonces $(q-1)^{r-1}$ divide a $|X|$.

Nuevamente tomamos el caso cuando X proviene de gráficas.

Corolario 31. Sea G una gráfica conexa con vertices x_1, \dots, x_n y sea x^{v_1}, \dots, x^{v_s} el conjunto de monomios $x_i x_j$ tal que $\{x_i, x_j\}$ es una arista. Entonces

1. $|X| = (q-1)^{n-1}$ si G es no-bipartita
2. $|X| = (q-1)^{n-2}$ si G es bipartita.

El corolario anterior nos hace preguntarnos si existe una fórmula que calcule el grado de $S/I(X)$ para gráficas no conexas y aunque no se ha encontrado dicha fórmula se puede asegurar que la hipótesis de conexidad es esencial para las fórmulas anteriores como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 32. Sea $K = \mathbb{F}_7$ y sea X el conjunto parametrizado por los monomios $x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3, x_4 x_5, x_5 x_6, x_4 x_6$. Aquí $n = s = 6$. Usando *Macaulay2* obtenemos

- $|X| = \text{grado}(S/I(X)) = 3888$
- $|X| = 3888 \neq (q-1)^{n-1} = 6^5 = 7776$
- $\text{reg } S/I(X) = 16$

6. La estructura geométrica de X

Proposición 33. Si $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_s\}$ es homogéneo y $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}\{(v_i, 1)\}_{i=1}^s$ es libre de torsión, entonces

$$X = V(I_{\mathcal{A}} + \{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s),$$

y (Nullstellensatz Finito)

$$(I_{\mathcal{A}} + \{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s) : (t_1 \cdots t_s)^\infty = I(V(I_{\mathcal{A}} + \{t_i^{q-1} - t_1^{q-1}\}_{i=2}^s)).$$

7. El caso de monomios libres de cuadrado

Teorema 34 (Sarmiento, Vaz Pinto, Villarreal, 2010) Sea I un ideal monomial libre de cuadrados de $R = K[x_1, \dots, x_n]$ y sea x^{v_1}, \dots, x^{v_s} el conjunto mínimo de generadores de I . Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $I(X)$ es una intersección completa.
2. $I(X) = (t_1^{q-1} - t_s^{q-1}, \dots, t_{s-1}^{q-1} - t_s^{q-1})$.
3. $X = \mathbb{T} \subset \mathbb{P}^{s-1}$.

Observación 35. Un problema interesante es considerar un conjunto x^{v_1}, \dots, x^{v_s} de monomios arbitrarios con $I(X)$ una intersección completa, y preguntarse si $I(X)$ es generado por binomios de la forma $t_i^k - t_j^k$.

Para terminar se definirá la *complejidad de grado* de $I(X)$ y se expondrá un teorema al respecto.

Definición 9. Sea \succ el orden *graduado lexicográfico inverso* en los monomios de S y sea \mathcal{G} la base de Gröbner reducida de $I(X)$. La *complejidad de grado* de $I(X)$ con respecto a \succ es el máximo de los grados de los binomios de \mathcal{G} .

Teorema 36 (Sarmiento, Vaz Pinto, Villarreal, 2010) Sea I un ideal monomial libre de cuadrado de $K[x_1, \dots, x_n]$ y sea x^{v_1}, \dots, x^{v_s} el conjunto mínimo de generadores de I . Entonces

- $t_i^{q-1} - t_s^{q-1} \in \mathcal{G}$ para $i = 1, \dots, s-1$,
- $\deg_{t_i}(g) \leq q-1$ para $g \in \mathcal{G}$ y $1 \leq i \leq s$.

References

- [1] W. W. Adams and P. Loustau, *An Introduction to Gröbner Bases*, GSM **3**, American Mathematical Society, 1994.
- [2] N. Alon, Combinatorial Nullstellensatz, Recent trends in combinatorics *Combin. Probab. Comput* (Mátraháza, 1995). **8** (1999), no. 1-2, 7–29.
- [3] P. Delsarte, J. M. Goethals and F. J. MacWilliams, *On generalized Reed-Muller codes and their relatives*, *Information and Control* **16** (1970), 403–442.
- [4] I. M. Duursma, C. Rentería and H. Tapia-Recillas, Reed-Muller codes on complete intersections, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **11** (2001), no. 6, 455–462.
- [5] D. Eisenbud and B. Sturmfels, *Binomial ideals*, *Duke Math. J.* **84** (1996), 1–45.
- [6] A. V. Geramita, M. Kreuzer and L. Robbiano, Cayley-Bacharach schemes and their canonical modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **339** (1993), no. 1, 163–189.
- [7] L. Gold, J. Little and H. Schenck, Cayley-Bacharach and evaluation codes on complete intersections, *J. Pure Appl. Algebra* **196** (2005), no. 1, 91–99.
- [8] M. González-Sarabia and C. Rentería, Evaluation codes associated to complete bipartite graphs, *Int. J. Algebra* **2** (2008), no. 1-4, 163–170.
- [9] M. González-Sarabia, C. Rentería and M. Hernández de la Torre, Minimum distance and second generalized Hamming weight of two particular linear codes, *Congr. Numer.* **161** (2003), 105–116.
- [10] M. González-Sarabia, C. Rentería and H. Tapia-Recillas, Reed-Muller-type codes over the Segre variety, *Finite Fields Appl.* **8** (2002), no. 4, 511–518.
- [11] D. Grayson and M. Stillman, *Macaulay2*, 1996. Available via anonymous ftp from math.uiuc.edu.
- [12] J. Harris, *Algebraic Geometry. A first course*, Graduate Texts in Mathematics **133**, Springer-Verlag, New York, 1992.

- [13] F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane, *The Theory of Error-correcting Codes*, North-Holland, 1977.
- [14] C. Rentería, A. Simis and R. H. Villarreal, Algebraic methods for parameterized codes and invariants of vanishing ideals over finite fields. Preprint, 2010, [arXiv:1001.1448](#) .
- [15] E. Reyes, R. H. Villarreal and L. Zárate, A note on affine toric varieties, *Linear Algebra Appl.* **318** (2000), 173–179.
- [16] E. Sarmiento, M. Vaz Pinto and R. H. Villarreal, The minimum distance of parameterized codes of complete intersection vanishing ideals over finite fields, preprint, 2010.
- [17] A. Sørensen, Projective Reed-Muller codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* **37** (1991), no. 6, 1567–1576.
- [18] R. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, *Adv. Math.* **28** (1978), 57–83.
- [19] H. Stichtenoth, *Algebraic function fields and codes*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [20] M. Tsfasman, S. Vladut and D. Nogin, *Algebraic geometric codes: basic notions*, Mathematical Surveys and Monographs **139**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [21] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **238**, Marcel Dekker, New York, 2001.

Distribución de confianza del parámetro de forma de la distribución gamma, cuando el de escala es de ruido *

Edilberto Nájera Rangel †

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

En este trabajo se presenta un método para obtener una estimación de la distribución de confianza del parámetro de forma de la distribución gamma, cuando el de escala es de ruido. Se compara con la estimación correspondiente de la distribución posterior bayesiana que se obtiene cuando se usa la distribución previa no informativa de Jeffreys.

In this paper a method is presented for obtaining an estimate of the confidence distribution for the shape parameter of the gamma distribution, when the scale parameter is a nuisance parameter. A comparison is made with the corresponding estimate of the Bayesian posterior distribution that is obtained by using Jeffreys' non-informative prior.

Palabras clave: Distribución de confianza, Pivotal, Razón de verosimilitudes monótona, Función de verosimilitud, Verosimilitud Perfil, Distribución previa no informativa de Jeffreys, Aproximación normal asintótica, Algoritmo de Metropolis-Hastings, Distribución posterior.

Keywords: Confidence distribution, Pivot, Monotone likelihood ratio, Likelihood function, Profile likelihood, Jeffreys' non-informative prior distribution, Asymptotic normal approximation, Metropolis-Hastings algorithm, Posterior distribution.

1. Introducción

El contexto es un modelo paramétrico de una población descrita por una variable aleatoria X con distribución de probabilidad $P(x; \psi, \omega)$, donde ψ es un parámetro real de interés primario que pertenece a un intervalo finito o infinito, y ω es un vector formado por los demás parámetros reales referidos como de ruido.

Definición 1. Sean $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de la distribución continua $P(x; \psi, \omega)$ y \underline{x} una observación de \underline{X} . Una función de distribución continua $C(\psi; \underline{x})$ de ψ , es una **distribución de confianza** de ψ si

$$P(C(\psi; \underline{X}) \leq a; (\psi, \omega)) = a, \quad \text{con } 0 \leq a \leq 1,$$

para cualquier par (ψ, ω) .

*Recibido el 31 de Agosto de 2010 y aceptado el 12 de Octubre de 2010

†**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** edilberto.najera@ujat.mx

Observación 1. La definición 1 se centra en el hecho de que la variable aleatoria $C(\psi; \underline{X})$ tiene distribución uniforme cuando los parámetros verdaderos son (ψ, ω) .

Observación 2. Si $C(\psi; \underline{x})$ es una función de distribución de ψ , entonces a $C(\psi; \underline{x})$ también se le llama **Distribución de Significancia** o **Distribución Fiducial**.

Si $0 < \alpha < 1$, sea

$$C^{-1}(\alpha; \underline{x}) = \inf \{ \psi : C(\psi; \underline{x}) \geq \alpha \}.$$

Para intervalos de confianza unilaterales $(-\infty, \psi_\alpha)$, donde $\psi_\alpha = C^{-1}(\alpha; \underline{X})$, la probabilidad de cobertura (o cobertura frecuentista) es α porque

$$P(\psi \leq \psi_\alpha) = P_{\psi, \omega}(C(\psi; \underline{X}) \leq C(\psi_\alpha; \underline{X})) = P_{\psi, \omega}(C(\psi; \underline{X}) \leq \alpha) = \alpha.$$

De igual modo, para intervalos de confianza bilaterales $(\psi_\alpha, \psi_\beta)$ la probabilidad de cobertura es $\beta - \alpha$, porque

$$\begin{aligned} P(\psi_\alpha \leq \psi \leq \psi_\beta) &= P_{\psi, \omega}(C(\psi_\alpha; \underline{X}) \leq C(\psi; \underline{X}) \leq C(\psi_\beta; \underline{X})) \\ &= P_{\psi, \omega}(\alpha \leq C(\psi; \underline{X}) \leq \beta) = \beta - \alpha. \end{aligned}$$

2. Algunos métodos para obtener distribuciones de confianza

En esta sección vemos dos métodos para obtener distribuciones de confianza.

2.1 El método de la pivotal

Definición 2. Una variable aleatoria $Q(\underline{X}; \theta)$ es una **pivotal** (o **cantidad pivotal**) si su distribución no depende de ningún parámetro. Es decir, si \underline{X} tiene distribución $F(\underline{x}; \theta)$, entonces $Q(\underline{X}; \theta)$ tiene la misma distribución para todos los valores de θ .

Sea $piv(\underline{X}; \psi)$ una pivotal con función de distribución F . Si $piv(\underline{X}; \psi)$ es creciente y continua como función de ψ , entonces $F(piv(\underline{X}; \psi))$ también es creciente y continua como función de ψ y

$$C(\psi; \underline{X}) = F(piv(\underline{X}; \psi)) \sim U(0, 1).$$

Por lo tanto $C(\psi; \underline{x})$ es una distribución de confianza de ψ .

Si $piv(\underline{X}; \psi)$ es decreciente y continua como función de ψ , entonces $1 - F(piv(\underline{X}; \psi))$ es creciente y continua como función de ψ y

$$C(\psi; \underline{X}) = 1 - F(piv(\underline{X}; \psi)) \sim U(0, 1).$$

De aquí, $C(\psi; \underline{x})$ es una distribución de confianza de ψ .

Ejemplo 1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos, μ es el parámetro de interés y σ^2 es de ruido. Si $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ y $S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, entonces la pivotal

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_{n-1}},$$

la cual es decreciente como función de μ , tiene una distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Si $F_{t, n-1}$ denota a la función de distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad, se sigue que

$$C(\mu; \underline{x}) = 1 - F_{t, n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s_{n-1}} \right)$$

es una distribución de confianza para μ .

Ejemplo 2. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos, μ es de ruido y σ^2 es de interés. Si \bar{X} y S_{n-1}^2 son como en el ejemplo 1, entonces la pivotal

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2},$$

la cual es decreciente como función de σ^2 , tiene una distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad. Si $F_{\chi^2, n-1}$ denota a la función de distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, se tiene entonces que

$$C(\sigma^2; \underline{x}) = 1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\sigma^2} \right)$$

es una distribución de confianza para σ^2 .

2.2 El método de la razón de verosimilitudes monótona

Definición 3. Una familia de funciones de densidad de probabilidad o de funciones de probabilidad $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ de una variable aleatoria T , tiene **razón de verosimilitudes monótona** si, siempre que $\theta_1 < \theta_2$,

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)}$$

es monótona como función de t en

$$\{t : g(t; \theta_1) > 0 \text{ ó } g(t; \theta_2) > 0\},$$

donde por definición

$$\frac{c}{0} = \infty$$

si $c > 0$.

Proposición 1. Sea T variable aleatoria cuya familia de densidades de probabilidad o de funciones de masa de probabilidad es $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$, tal que para $\theta_1 < \theta_2$

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)}$$

es creciente como función de t . Entonces

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t) \leq \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t).$$

Prueba. Sean $t_1 < t < t_2$. De aquí

$$\frac{g(t_1; \theta_2)}{g(t_1; \theta_1)} \leq \frac{g(t_2; \theta_2)}{g(t_2; \theta_1)} \implies g(t_1; \theta_2)g(t_2; \theta_1) \leq g(t_1; \theta_1)g(t_2; \theta_2).$$

Integrando primero sobre t_1 de $-\infty$ a t y después sobre t_2 de t a ∞ se tiene

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t)(1 - \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t)) \leq \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t)(1 - \mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t)),$$

de donde,

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t) \leq \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t). \quad \blacksquare$$

Corolario 1. Si para $\theta_1 < \theta_2$

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)}$$

es decreciente como función de t , entonces

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t) \leq \mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t).$$

Corolario 2. Sean T variable aleatoria continua como en la proposición 1, $\mathbf{P}_\theta(T \leq t)$ continua como función de θ , y $\Theta = (\theta_{\inf}, \theta_{\sup})$. Si $\mathbf{P}_\theta(T \leq t) \rightarrow 1$ cuando $\theta \rightarrow \theta_{\inf}$ y $\mathbf{P}_\theta(T \leq t) \rightarrow 0$ cuando $\theta \rightarrow \theta_{\sup}$, entonces $C(\theta; t) = 1 - \mathbf{P}_\theta(T \leq t)$ es una distribución de confianza de θ .

Definición 4. La familia $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$, de funciones de densidad de probabilidad o de funciones de masa de probabilidad, se llama una **familia exponencial** si $g(t; \theta)$ se puede expresar en la forma

$$g(t; \theta) = h(t)c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^k w_i(\theta) q_i(t)\right),$$

donde $h(t) \geq 0$ y q_1, \dots, q_k son funciones de valor real que no dependen de θ , y $c(\theta) \geq 0$ y w_1, \dots, w_k son funciones de valor real que no dependen de t .

Lema 1. Sea

$$g(t; \theta) = h(t)c(\theta) \exp \left(\sum_{i=1}^k w_i(\theta) q_i(t) \right), \quad \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R},$$

una familia exponencial. Si todas las funciones w_i son monótonas crecientes o todas son monótonas decrecientes, y si todas las funciones q_i son monótonas crecientes o todas son monótonas decrecientes, entonces $g(t; \theta)$ tiene razón de verosimilitudes monótona.

Prueba. Sean $\theta_1 < \theta_2$. Entonces

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)} = \frac{c(\theta_2)}{c(\theta_1)} \exp \left(\sum_{i=1}^k (w_i(\theta_2) - w_i(\theta_1)) q_i(t) \right)$$

es monótona como función de t . ■

Ejemplo 3. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución gamma con parámetro de forma $\alpha > 0$ desconocido, y parámetro de escala $\beta > 0$ conocido. Sea $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces S tiene una distribución gamma con parámetro de forma $n\alpha$ y parámetro de escala β . Si f es su función de densidad,

$$f(s; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha) \beta^{n\alpha}} s^{n\alpha-1} e^{-\frac{s}{\beta}},$$

la cual se puede escribir en la forma

$$f(s; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha) \beta^{n\alpha}} e^{-\frac{s}{\beta}} e^{(n\alpha-1) \log s},$$

es decir, $\{f(s; \alpha) : \alpha > 0\}$ es una familia exponencial. Puesto que $n\alpha - 1$ es creciente como función de α , y $\log s$ es creciente como función de s , por el Lema 1 $f(s; \alpha)$ tiene razón de verosimilitudes monótona. Si $F(s; \alpha)$ es su función de distribución, entonces $F(s; \alpha) \rightarrow 1$ cuando $\alpha \rightarrow 0$, y $F(s; \alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$C(\alpha; s) = 1 - F(s; \alpha)$$

es una distribución de confianza de α . Si $\beta = 1$, la función de densidad de confianza de α , una vez que se observó s , es

$$c(\alpha; s) = -(d/d\alpha)F(s; \alpha) = \int_0^s (\psi(n\alpha) - n \log t) f(t; \alpha) dt,$$

donde $\psi(\alpha)$ es la función digama, $\psi(\alpha) = \left(\frac{d}{d\alpha}\right) (\log \Gamma(\alpha))$.

3. Un Método para obtener una distribución de confianza del parámetro de forma de la distribución gamma, cuando el de escala es de ruido

Supongamos que ahora nos interesa hacer inferencia sobre el parámetro de forma de la distribución gamma,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Si $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son las observaciones de la muestra aleatoria $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, la función de verosimilitud de α y β es

$$L(\alpha, \beta; \underline{x}) = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n \beta^{n\alpha}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i \right);$$

la verosimilitud perfil de α es

$$L_p(\alpha; \underline{x}) = \frac{\alpha^{n\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^n (\bar{x})^{n\alpha}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} e^{-n\alpha} = \frac{\alpha^{n\alpha} e^{-n\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^n} \left(\frac{(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}}{\bar{x}} \right)^{n\alpha} \prod_{i=1}^n x_i,$$

de donde tenemos que

$$T = \frac{\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}}}{\bar{X}}$$

es un estadístico suficiente de α , dado que β es de ruido. Si t_0 es un valor de T , la distribución de confianza de α , $H(\alpha; t_0)$, se estima como sigue:

1. Se generan m observaciones, $(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{m1}, \dots, x_{mn})$, de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución Gamma ($\alpha, \beta = 1$).
2. Para $j = 1, \dots, m$, sea

$$t_j = \frac{\left(\prod_{i=1}^n x_{ji} \right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji}}.$$

Sea $k = \text{núm}\{t_j > t_0\}$. Entonces

$$H(\alpha; t_0) \approx \frac{k}{n}.$$

Algoritmo para obtener una estimación de la distribución de confianza de α .

1. Dadas las observaciones $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de la muestra aleatoria $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, sea

$$t_0 = \frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}}{\bar{x}}.$$

2. Generar una partición $\alpha_{\text{inf}} = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = \alpha_{\text{sup}}$, de $[\alpha_{\text{inf}}, \alpha_{\text{sup}}]$, donde α_{inf} es el alfa tal que el área bajo la función de densidad de confianza a la izquierda de α_{inf} es un valor predeterminado, por ejemplo .01, y α_{sup} es el alfa tal que el área bajo la función de densidad de confianza a la derecha de α_{sup} es un valor predeterminado, por ejemplo .01.

3. Obtener estimaciones de $H(\alpha_i; t_0)$, $i = 0, \dots, r$.
4. Obtener una estimación de la función de densidad de confianza $h(\alpha; t_0)$.

Ejemplo 4. Se generaron x_1, \dots, x_{30} , observaciones de una muestra aleatoria de tamaño 30, X_1, \dots, X_{30} , de una distribución Gamma($\alpha = 3, \beta = 5$). En la figura 1 aparece la gráfica de la densidad de confianza estimada de α , dado que β es de ruido.

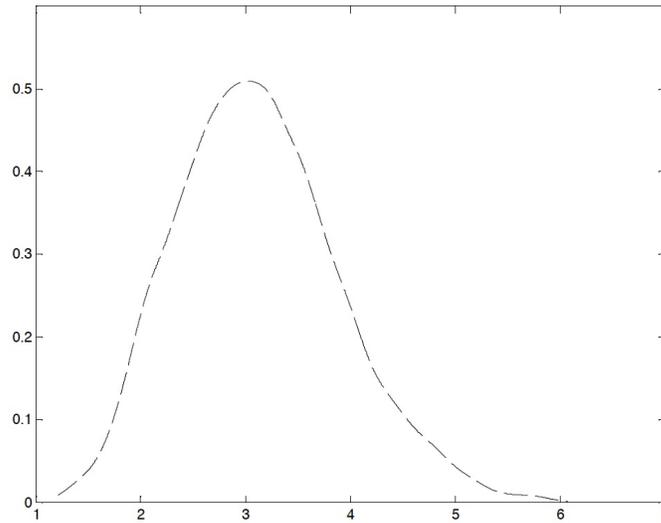


Figura 1. Densidad de confianza estimada de α , dado que β es de ruido.

Ahora, desde el punto de vista bayesiano, queremos encontrar la función de densidad posterior de α y β dados x_1, \dots, x_{30} . La densidad previa que se usará es la no informativa de Jeffreys, la cual está dada por

$$p(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\beta} \left| \frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

De aquí,

$$p(\alpha, \beta | x_1, \dots, x_{30}) = \frac{p(x_1, \dots, x_{30}, \alpha, \beta)}{p(x_1, \dots, x_{30})} = \frac{f(x_1, \dots, x_{30} | \alpha, \beta)p(\alpha, \beta)}{p(x_1, \dots, x_{30})},$$

donde, de acuerdo al punto de vista bayesiano, $f(x_1, \dots, x_{30} | \alpha, \beta)$ es la función de densidad conjunta de X_1, \dots, X_{30} dados α y β . Desde el punto de vista clásico es la función de densidad conjunta de X_1, \dots, X_{30} con parámetros α y β . Así,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{30} | \alpha, \beta) &= f(x_1, \dots, x_{30}; \alpha, \beta) = f(x_1; \alpha, \beta)f(x_2; \alpha, \beta)\dots f(x_n; \alpha, \beta) = \\ &= \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n \beta^{n\alpha}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p(\alpha, \beta \mid x_1, \dots, x_{30}) \propto f(x_1, \dots, x_{30} \mid \alpha, \beta) p(\alpha, \beta) = \\ = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n \beta^{n\alpha}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{1}{\beta} \left| \frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Una forma de encontrar $p(\alpha, \beta \mid x_1, \dots, x_{30})$ es resolviendo la integral doble

$$\iint f(x_1, \dots, x_{30} \mid \alpha, \beta) p(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Por último, la densidad posterior de α dados x_1, \dots, x_{30} se obtiene como

$$h(\alpha \mid x_1, \dots, x_{30}) = \int p(\alpha, \beta \mid x_1, \dots, x_{30}) d\beta.$$

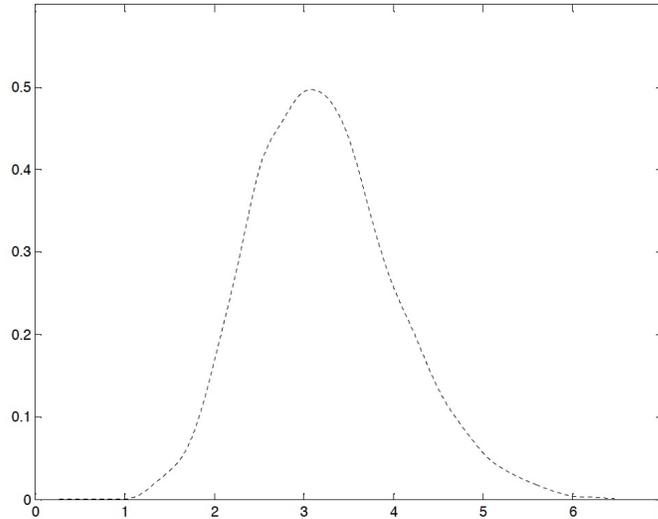


Figura 2. Densidad posterior estimada de α dada $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{30})$.

Sin embargo, las dos últimas integrales no se pueden resolver analíticamente. En este caso lo mejor es obtener una muestra simulada de $p(\alpha, \beta \mid x_1, \dots, x_{30})$, lo cual se hace a través de la aproximación normal asintótica y del algoritmo de Metropolis-Hastings. Este último es una técnica de simulación de Monte Carlo para construir de manera iterativa una cadena de Markov, cuya distribución de equilibrio es la distribución final que nos interesa. Por último, de la muestra simulada de $p(\alpha, \beta \mid x_1, \dots, x_{30})$ se obtiene una estimación de la densidad posterior de α dada $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{30})$.

Ejemplo 5. Para la misma muestra del ejemplo anterior, y utilizando la densidad previa no informativa de Jeffreys, en la figura 2 aparece la gráfica de la densidad posterior estimada de α dada $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{30})$.

En la figura 3 aparecen las gráficas de las dos densidades estimadas.

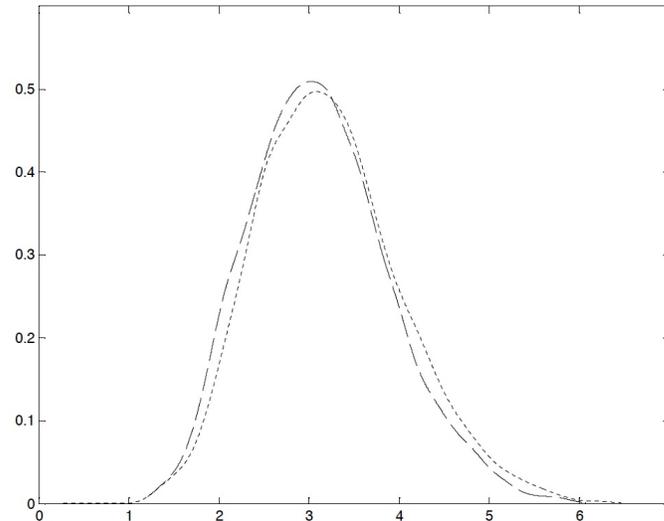


Figura 3. Comparación de las dos densidades estimadas.

4. Conclusiones

De la figura 3 vemos que aparentemente la distribución de confianza del parámetro de forma de la distribución gamma se centra mejor alrededor de dicho parámetro, que en este caso vale 3, que lo que lo hace la correspondiente distribución posterior obtenida con la previa de Jeffreys. Esto es muy importante porque en las aplicaciones nos permitiría obtener mejores estimaciones del parámetro referido. Por tal motivo, es de interés obtener métodos (preferentemente basados en estadísticas con características interesantes, idealmente estadísticas suficientes) para deducir distribuciones de confianza, así como analizar las propiedades de tales distribuciones de confianza.

Referencias

- [1] Barnard, G.A. (1982). A new approach to the Behrens-Fisher problem. *Utilitas Mathematica*, 21B, 261-271.
- [2] Barnard, G.A. (1987). R.A. Fisher-a true Bayesian?. *International Statistical Review*, 55, 183-189.
- [3] Brown, L.D., Cai, T. T. and A. Das Gupta (2001). Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science*, 16(2), 101-133.
- [4] Brown, L.D., Cai, T. T. and A. Das Gupta (2002). Confidence Intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions. *The Annals of Statistics*, 30(1), 160-201.
- [5] Dempster, A.P. (1964). On the difficulties inherent in Fisher's fiducial argument. *Journal of the American Statistical Association*, 59, 56-66.
- [6] Efron, B. (1998). R. A. Fisher in the 21st century. *Statistical Science*, 13, 95-122.

- [7] Fisher, R.A. (1930). Inverse probability. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 26, 528-535.
- [8] Fisher, R.A. (1945). The logical inversion of the notation of the random variable. Sankhya, 7, 182-187.
- [9] Gamerman, D. *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic simulation for Bayesian inference*. Chapman y Hall, London, 1997.
- [10] Gutiérrez Peña, E. *MÉTODOS COMPUTACIONALES EN LA INFERENCIA BAYESIANA*. IIMAS-UNAM, México, 1997.
- [11] Kabaila, P. And J. Byrne (2001). Exact short Poisson confidence intervals. The Canadian Journal of Statistics, 29(1), 99-106.
- [12] Lehmann, E.L. (1993). The Fisher, Neyman-Pearson theories of testing hypotheses: one theory of two?. Journal of the American Statistical Association, 88, 1242-1249.
- [13] Lindley, D.V. (1958). Fiducial distributions and Bayes' theorem. Journal of the Royal Statistical Society Series B, 20, 102-107.
- [14] W.L. Martinez, y A.R. Martinez. *Computational Statistics Handbook with MATLAB*. Chapman y Hall/CRC, Boca Raton, 2002.
- [15] O'Reilly, F. (2003). Significance Distributions. Reporte técnico, Unidad de Publicaciones y Difusión, IIMAS, UNAM.
- [16] Pedersen, J.G. (1978). Fiducial inference. International Statistical Review, 46, 147-170.
- [17] Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a Multivariate Transformation. The Annals of Mathematical Statistics, 23, 470 - 472.
- [18] Schweder, T. and Hjort, N.L. (2002). Confidence and likelihood. Scandinavian Journal of Statistics, 29, 309-332.
- [19] Stein, C. (1959). An example of wide discrepancy between fiducial and confidence intervals. Annals of Mathematical Statistics, 30, 877-880.
- [20] Wilkinson, G.N. (1977). On resolving the controversy in statistical inference. Journal of the Royal Statistical Society Series B, 39, 119-171.

Distribuciones de confianza *

Edilberto Nájera Rangel †

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

Braly Guadalupe Peralta Reyes ‡

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

En este trabajo se presentan las distribuciones de confianza. También se ven dos métodos exactos para obtenerlas, así como las propiedades básicas de ellas. Por último, se muestra que las distribuciones de confianza permiten ver de forma unificada los valores p y los intervalos de confianza.

In this paper the basic properties of confidence distributions are discussed. Also, two exact procedures for obtaining them are given. It is shown that the confidence distributions permit one to see the unified form of the P -values and the confidence intervals.

Palabras clave: Función de verosimilitud, Intervalo de confianza, Percentil, Pivotal, Prueba de hipótesis, Razón de verosimilitudes monótona, Valor p .

Keywords: likelihood function, Confidence interval, Percentile, Pivot, Hypothesis test, Monotone likelihood ratio, P -value.

1. Introducción

Las distribuciones de confianza tienen sus raíces en Fisher y Neyman. Constituyen la interpretación de Neyman sobre las distribuciones fiduciales de Fisher. La metodología frecuentista obtenida de las distribuciones de confianza tiene mucho del atractivo de la metodología bayesiana.

La forma más apropiada para presentar información incierta es a través de las distribuciones de probabilidad. Mucho del atractivo del enfoque bayesiano se debe a que las emplea como formato para presentar lo que se ha aprendido de la información nueva, lo cual hace por medio de las distribuciones previa y posterior. Como una alternativa a la distribución posterior bayesiana, Fisher (1930) introdujo las distribuciones de probabilidad fiduciales como formato para presentar lo que se ha aprendido de los datos a través del modelo de probabilidad. Los percentiles de una distribución fiducial son los puntos extremos de los intervalos fiduciales. Siguiendo a Neyman en lugar de Fisher al entender los intervalos fiduciales como intervalos de confianza, se emplea el término distribución de confianza, de acuerdo con Efron (1998) y otros autores.

En la tradición frecuentista, los intervalos de confianza y los valores p constituyen la forma básica de presentar los reportes estadísticos. La relación cercana entre los

*Recibido el 1 de Agosto de 2010 y aceptado el 10 de Noviembre de 2010

†**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** edilberto.najera@ujat.mx

‡**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** kane_82@hotmail.com

valores p y los intervalos de confianza nos permiten verlos de forma unificada a través de las distribuciones de confianza, como se mostrará en el presente trabajo. También se mostrarán dos métodos para obtener distribuciones de confianza.

2. Dos métodos para obtener distribuciones de confianza

El contexto es un modelo paramétrico de una población descrita por una variable aleatoria X con distribución de probabilidad $P(x; \psi, \omega)$, donde ψ es un parámetro real de interés primario que pertenece a un intervalo finito o infinito, y ω es un vector formado por los demás parámetros reales referidos como de ruido.

Definición 1. Sean $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de la distribución continua $P(x; \psi, \omega)$ y \underline{x} una observación de \underline{X} . Una función de distribución continua $C(\psi; \underline{x})$ de ψ , es una **distribución de confianza** de ψ si

$$P(C(\psi; \underline{X}) \leq a; (\psi, \omega)) = a, \quad \text{con } 0 \leq a \leq 1,$$

para cualquier par (ψ, ω) .

Observación 1. La definición 1 se centra en el hecho de que la variable aleatoria $C(\psi; \underline{X})$ tiene distribución uniforme cuando los parámetros verdaderos son (ψ, ω) .

Observación 2. Si $C(\psi; \underline{x})$ es una función de distribución de ψ , entonces a $C(\psi; \underline{x})$ también se le llama **Distribución de Significancia** o **Distribución Fiducial**.

Si $0 < \alpha < 1$, sea

$$C^{-1}(\alpha; \underline{x}) = \inf \{ \psi : C(\psi; \underline{x}) \geq \alpha \}.$$

Para intervalos de confianza unilaterales $(-\infty, \psi_\alpha)$, donde $\psi_\alpha = C^{-1}(\alpha; \underline{X})$, la probabilidad de cobertura (o cobertura frecuentista) es α porque

$$P(\psi \leq \psi_\alpha) = P_{\psi, \omega}(C(\psi; \underline{X}) \leq C(\psi_\alpha; \underline{X})) = P_{\psi, \omega}(C(\psi; \underline{X}) \leq \alpha) = \alpha.$$

De igual modo, para intervalos de confianza bilaterales $(\psi_\alpha, \psi_\beta)$ la probabilidad de cobertura es $\beta - \alpha$, porque

$$\begin{aligned} P(\psi_\alpha \leq \psi \leq \psi_\beta) &= P_{\psi, \omega}(C(\psi_\alpha; \underline{X}) \leq C(\psi; \underline{X}) \leq C(\psi_\beta; \underline{X})) \\ &= P_{\psi, \omega}(\alpha \leq C(\psi; \underline{X}) \leq \beta) = \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Se tienen los dos métodos siguientes para obtener distribuciones de confianza.

2.1 El método de la pivotal

Definición 2. Una variable aleatoria $Q(\underline{X}; \theta)$ es una **pivotal** (o **cantidad pivotal**) si su distribución no depende de ningún parámetro. Es decir, si \underline{X} tiene distribución $F(\underline{x}; \theta)$, entonces $Q(\underline{X}; \theta)$ tiene la misma distribución para todos los valores de θ .

Sea $piv(\underline{X}; \psi)$ una pivotal con función de distribución F . Si $piv(\underline{X}; \psi)$ es creciente y continua como función de ψ , entonces $F(piv(\underline{X}; \psi))$ también es creciente y continua como función de ψ y

$$C(\psi; \underline{X}) = F(piv(\underline{X}; \psi)) \sim U(0, 1).$$

Por lo tanto $C(\psi; \underline{x})$ es una distribución de confianza de ψ .

Si $piv(\underline{X}; \psi)$ es decreciente y continua como función de ψ , entonces $1 - F(piv(\underline{X}; \psi))$ es creciente y continua como función de ψ y

$$C(\psi; \underline{X}) = 1 - F(piv(\underline{X}; \psi)) \sim U(0, 1).$$

De aquí, $C(\psi; \underline{x})$ es una distribución de confianza de ψ .

Ejemplo 1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos, μ es el parámetro de interés y σ^2 es de ruido. Si $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ y $S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, entonces la pivotal

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_{n-1}},$$

la cual es decreciente como función de μ , tiene una distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Si $F_{t, n-1}$ denota a la función de distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad, se sigue que

$$C(\mu; \underline{x}) = 1 - F_{t, n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s_{n-1}} \right)$$

es una distribución de confianza para μ .

Ejemplo 2. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos, μ es de ruido y σ^2 es de interés. Si \bar{X} y S_{n-1}^2 son como en el ejemplo 1, entonces la pivotal

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2},$$

la cual es decreciente como función de σ^2 , tiene una distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad. Si $F_{\chi^2, n-1}$ denota a la función de distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, se tiene entonces que

$$C(\sigma^2; \underline{x}) = 1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\sigma^2} \right)$$

es una distribución de confianza para σ^2 .

2.2 El método de la razón de verosimilitudes monótona

Definición 3. Una familia de funciones de densidad de probabilidad o de funciones de probabilidad $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ de una variable aleatoria T , tiene **razón de verosimilitudes monótona** si, siempre que $\theta_1 < \theta_2$,

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)}$$

es monótona como función de t en

$$\{t : g(t; \theta_1) > 0 \text{ ó } g(t; \theta_2) > 0\},$$

donde por definición

$$\frac{c}{0} = \infty$$

si $c > 0$.

Proposición 1. Sea T variable aleatoria cuya familia de densidades de probabilidad o de funciones de masa de probabilidad es $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$, tal que para $\theta_1 < \theta_2$

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)}$$

es creciente como función de t . Entonces

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t) \leq \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t).$$

Prueba. Sean $t_1 < t < t_2$. De aquí

$$\frac{g(t_1; \theta_2)}{g(t_1; \theta_1)} \leq \frac{g(t_2; \theta_2)}{g(t_2; \theta_1)} \implies g(t_1; \theta_2)g(t_2; \theta_1) \leq g(t_1; \theta_1)g(t_2; \theta_2).$$

Integrando primero sobre t_1 de $-\infty$ a t y después sobre t_2 de t a ∞ se tiene

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t)(1 - \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t)) \leq \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t)(1 - \mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t)),$$

de donde,

$$\mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t) \leq \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t). \quad \blacksquare$$

Corolario 1. Si para $\theta_1 < \theta_2$

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)}$$

es decreciente como función de t , entonces

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(T \leq t) \leq \mathbf{P}_{\theta_2}(T \leq t).$$

Corolario 2. Sean T variable aleatoria continua como en la proposición 1, $\mathbf{P}_\theta(T \leq t)$ continua como función de θ , y $\Theta = (\theta_{\text{inf}}, \theta_{\text{sup}})$. Si $\mathbf{P}_\theta(T \leq t) \rightarrow 1$ cuando $\theta \rightarrow \theta_{\text{inf}}$ y $\mathbf{P}_\theta(T \leq t) \rightarrow 0$ cuando $\theta \rightarrow \theta_{\text{sup}}$, entonces $C(\theta; t) = 1 - \mathbf{P}_\theta(T \leq t)$ es una distribución de confianza de θ .

Definición 4. La familia $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$, de funciones de densidad de probabilidad o de funciones de masa de probabilidad, se llama una **familia exponencial** si $g(t; \theta)$ se puede expresar en la forma

$$g(t; \theta) = h(t)c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^k w_i(\theta) q_i(t)\right),$$

donde $h(t) \geq 0$ y q_1, \dots, q_k son funciones de valor real que no dependen de θ , y $c(\theta) \geq 0$ y w_1, \dots, w_k son funciones de valor real que no dependen de t .

Lema 1. Sea

$$g(t; \theta) = h(t)c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^k w_i(\theta) q_i(t)\right), \quad \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R},$$

una familia exponencial. Si todas las funciones w_i son monótonas crecientes o todas son monótonas decrecientes, y si todas las funciones q_i son monótonas crecientes o todas son monótonas decrecientes, entonces $g(t; \theta)$ tiene razón de verosimilitudes monótona.

Prueba. Sean $\theta_1 < \theta_2$. Entonces

$$\frac{g(t; \theta_2)}{g(t; \theta_1)} = \frac{c(\theta_2)}{c(\theta_1)} \exp\left(\sum_{i=1}^k (w_i(\theta_2) - w_i(\theta_1)) q_i(t)\right)$$

es monótona como función de t . ■

Ejemplo 3. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución gamma con parámetro de forma $\alpha > 0$ desconocido, y parámetro de escala $\beta > 0$ conocido. Sea $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces S tiene una distribución gamma con parámetro de forma $n\alpha$ y parámetro de escala β . Si f es su función de densidad,

$$f(s; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha) \beta^{n\alpha}} s^{n\alpha-1} e^{-\frac{s}{\beta}},$$

la cual se puede escribir en la forma

$$f(s; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha) \beta^{n\alpha}} e^{-\frac{s}{\beta}} e^{(n\alpha-1) \log s},$$

es decir, $\{f(s; \alpha) : \alpha > 0\}$ es una familia exponencial. Puesto que $n\alpha - 1$ es creciente como función de α , y $\log s$ es creciente como función de s , por el Lema 1, $f(s; \alpha)$ tiene razón de verosimilitudes monótona. Si $F(s; \alpha)$ es su función de distribución, entonces $F(s; \alpha) \rightarrow 1$ cuando $\alpha \rightarrow 0$, y $F(s; \alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$C(\alpha; s) = 1 - F(s; \alpha)$$

es una distribución de confianza de α . Si $\beta = 1$, la función de densidad de confianza de α , una vez que se observó s , es

$$c(\alpha; s) = -(d/d\alpha)F(s; \alpha) = \int_0^s (\psi(n\alpha) - n \log t) f(t; \alpha) dt,$$

donde $\psi(\alpha)$ es la función digama, $\psi(\alpha) = \left(\frac{d}{d\alpha}\right) (\log \Gamma(\alpha))$.

Ejemplo 4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población $N(\mu; \sigma^2)$, con μ desconocida y σ^2 conocida. Sea $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces $T \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, la cual es una familia exponencial. Si $f(t; \mu)$ es la función de densidad de T , resulta que $\frac{f(t; \mu_2)}{f(t; \mu_1)}$ es creciente como función de t si $\mu_1 < \mu_2$. De aquí, si $F(t; \mu)$ es la función de distribución de T , se tiene que $F(t; \mu)$ es monótonamente decreciente como función de μ . Por otro lado, si Φ es la función de distribución normal estándar, $F(t; \mu) = P(T \leq t) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t-\mu)}{\sigma}\right)$, de donde también se ve que la función de distribución de T es monótonamente decreciente como función de μ . Puesto que $F(t; \mu) \rightarrow 1$ cuando $\mu \rightarrow -\infty$, y $F(t; \mu) \rightarrow 0$ cuando $\mu \rightarrow \infty$, entonces la distribución de confianza de μ es

$$C(\mu; t) = 1 - F(t; \mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t-\mu)}{\sigma}\right).$$

Una vez que se observó t , la densidad de confianza de μ es

$$c(\mu; t) = -(d/d\mu)F(t; \mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{n(\mu-t)^2}{2\sigma^2}\right),$$

es decir, $\mu \sim N(t, \sigma^2/n)$.

3. Distribuciones de confianza, pruebas de hipótesis e intervalos de confianza

Definición 5. Sean $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto de valores posibles del parámetro θ , $\Theta_0 \subset \Theta$, y Θ_0^c el complemento de Θ_0 en Θ . En un problema de prueba de hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \in \Theta_0^c,$$

un valor p es un estadístico de prueba $p(\underline{X})$ que satisface $0 \leq p(\underline{x}) \leq 1$, para toda observación \underline{x} de \underline{X} , de modo que valores pequeños de $p(\underline{X})$ dan evidencia de que H_1 es cierta. Se dice que $p(\underline{x})$ es **el nivel de significancia alcanzado por la prueba**.

Ejemplo 5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos, μ es el parámetro de interés y σ^2 es de ruido. Sean \bar{X} y S_{n-1}^2 como en el ejemplo 1. Para realizar la prueba de hipótesis

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_0,$$

el estadístico de prueba es $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S_{n-1}}$. En este caso el valor p es

$$p(\underline{X}) = 1 - F_{t, n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S_{n-1}}\right) = C(\mu_0; \underline{X}),$$

donde $F_{t, n-1}$ denota a la función de distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad, y $C(\mu; \underline{x})$ es la distribución de confianza de μ .

Ejemplo 6. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos, μ es de ruido y σ^2 es de interés. Sean \bar{X} y S_{n-1}^2 como en el ejemplo 1. Para realizar la prueba de hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

el estadístico de prueba es $\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}$. En este caso el valor p es

$$p(\underline{X}) = 1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \right) = C(\sigma_0^2; \underline{X}),$$

donde $F_{\chi^2, n-1}$ denota a la función de distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, y $C(\sigma^2; \underline{x})$ es la distribución de confianza de σ^2 .

Lema 2. La confianza de la afirmación $\psi \leq \psi_0$ es el grado de confianza $C(\psi_0; \underline{x})$ del intervalo de confianza $(-\infty, C^{-1}(C(\psi_0; \underline{x})))$, y es igual al valor p observado de la prueba de hipótesis

$$H_0 : \psi \leq \psi_0 \quad vs \quad H_1 : \psi > \psi_0.$$

Prueba. Puesto que $C(\psi; \underline{x})$ es creciente como función de ψ , entonces $C(\psi; \underline{X})$ es un estadístico de prueba para probar

$$H_0 : \psi \leq \psi_0 \quad vs \quad H_1 : \psi > \psi_0,$$

de modo que valores pequeños de $C(\psi_0; \underline{X})$ dan evidencia de que H_1 es cierta; como $0 \leq C(\psi; \underline{x}) \leq 1$, entonces $C(\psi; \underline{X})$ es un valor p de la prueba hipótesis. Si \underline{x} es una observación de \underline{X} , el nivel de significancia alcanzado por la prueba de hipótesis, o la confianza de la afirmación $\psi \leq \psi_0$, es

$$p(\underline{x}) = C(\psi_0; \underline{x}) = P(C(\psi; \underline{X}) \leq C(\psi_0; \underline{x})).$$

Además,

$$P(\psi \leq C^{-1}(C(\psi_0; \underline{X}))) = P(C(\psi; \underline{X}) \leq C(C^{-1}(C(\psi_0; \underline{X})))) = P(C(\psi; \underline{X}) \leq C(\psi_0; \underline{X})),$$

o sea, $C(\psi_0; \underline{x})$ también es el grado de confianza del intervalo de confianza

$$(-\infty, C^{-1}(C(\psi_0; \underline{x}))).$$

■

Ejemplo 7. Sea $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ una observación del vector $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, donde X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con los parámetros μ y σ^2 desconocidos, μ es el parámetro de interés y σ^2 es de ruido. Sean \bar{X} y S_{n-1}^2 como en el ejemplo 1. Si $F_{t, n-1}$ denota a la función de distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad, sabemos que

$$C(\mu; \underline{x}) = 1 - F_{t, n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s_{n-1}} \right)$$

es una distribución de confianza para μ . Podemos determinar un intervalo de $(1 - \alpha)$ 100% de confianza para μ como sigue: Sean $\mu_{\frac{\alpha}{2}}$ y $\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$ tales que

$$C(\mu_{\frac{\alpha}{2}}; \underline{x}) = \frac{\alpha}{2}$$

y

$$C(\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}; \underline{x}) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

o sea,

$$1 - F_{t,n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} \right) = \frac{\alpha}{2}$$

y

$$1 - F_{t,n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{1-\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

De la primera de estas dos últimas igualdades tenemos

$$F_{t,n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

por lo tanto,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} = t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1},$$

donde $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ es el percentil $(1 - \frac{\alpha}{2})$ 100 de la distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad. De la última igualdad resulta

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Similarmente,

$$1 - F_{t,n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{1-\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

luego,

$$F_{t,n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{1-\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} \right) = \frac{\alpha}{2},$$

de donde,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_{1-\frac{\alpha}{2}})}{s_{n-1}} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}.$$

De aquí,

$$\mu_{1-\frac{\alpha}{2}} = \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Por lo tanto, un intervalo de $(1 - \alpha)$ 100% de confianza para μ es

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}},$$

el cual coincide con el intervalo de confianza respectivo que se obtiene usando el método común de estimación por intervalo.

Ejemplo 8. Sea $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ una observación del vector $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, donde X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con los parámetros μ y σ^2 desconocidos, μ es un parámetro de ruido y σ^2 es el de interés. Sean \bar{X} y S_{n-1}^2 como antes. Si $F_{\chi^2, n-1}$ denota a la función de distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, sabemos que

$$C(\sigma^2; \underline{x}) = 1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma^2} \right)$$

es una distribución de confianza para σ^2 . Determinamos un intervalo de $(1 - \alpha)$ 100% de confianza para σ^2 igual que en el ejemplo anterior: Sean $\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2$ y $\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ tales que

$$C(\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2; \underline{x}) = \frac{\alpha}{2}$$

y

$$C(\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2; \underline{x}) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

o sea,

$$1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$$

y

$$1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

De la primera de estas dos últimas igualdades se tiene

$$F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

luego

$$\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2} = \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2,$$

donde $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$ es el percentil $(1 - \frac{\alpha}{2}) 100$ de la distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. De la última igualdad se sigue que

$$\sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2 = \frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}.$$

Similarmente,

$$1 - F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

luego,

$$F_{\chi^2, n-1} \left(\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \right) = \frac{\alpha}{2},$$

de donde,

$$\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} = \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2.$$

De aquí,

$$\sigma_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = \frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

Por lo tanto, un intervalo del $(1 - \alpha) 100\%$ de confianza para σ^2 es

$$\frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) s_{n-1}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}.$$

4. Conclusiones

Una distribución de confianza tiene probabilidad de cobertura exacta. Adicionalmente, si está basada en un estadístico suficiente para el parámetro, entonces a través de ella podremos hacer inferencias más precisas sobre él, ya que un estadístico suficiente contiene toda la información que sobre el parámetro nos da la muestra de datos observada. Por tal motivo consideramos que es importante obtener tales distribuciones de confianza, aunque sea de forma aproximada por medio de métodos numéricos.

Referencias

- [1] Barnard, G.A. (1982). A new approach to the Behrens-Fisher problem. *Utilitas Mathematica*, 21B, 261-271.

- [2] Barnard, G.A. (1987). R.A. Fisher-a true Bayesian?. *International Statistical Review*, 55, 183-189.
- [3] Brown, L.D., Cai, T. T. and A. Das Gupta (2001). Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science*, 16(2), 101-133.
- [4] Brown, L.D., Cai, T. T. and A. Das Gupta (2002). Confidence Intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions. *The Annals of Statistics*, 30(1), 160-201.
- [5] Dempster, A.P. (1964). On the difficulties inherent in Fisher's fiducial argument. *Journal of the American Statistical Association*, 59, 56-66.
- [6] Efron, B. (1998). R. A. Fisher in the 21st century. *Statistical Science*, 13, 95-122.
- [7] Fisher, R.A. (1930). Inverse probability. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 26, 528-535.
- [8] Fisher, R.A. (1945). The logical inversion of the notation of the random variable. *Sankhya*, 7, 182-187.
- [9] Kabaila, P. And J. Byrne (2001). Exact short Poisson confidence intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 29(1), 99-106.
- [10] Lehmann, E.L. (1993). The Fisher, Neyman-Pearson theories of testing hypotheses: one theory of two?. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1242-1249.
- [11] Lindley, D.V. (1958). Fiducial distributions and Bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 20, 102-107.
- [12] O'Reilly, F. (2003). *Significance Distributions*. Reporte técnico, Unidad de Publicaciones y Difusión, IIMAS, UNAM.
- [13] Pedersen, J.G. (1978). Fiducial inference. *International Statistical Review*, 46, 147-170.
- [14] Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 470 - 472.
- [15] Schweder, T. and Hjort, N.L. (2002). Confidence and likelihood. *Scandinavian Journal of Statistics*, 29, 309-332.
- [16] Stein, C. (1959). An example of wide discrepancy between fiducial and confidence intervals. *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 877-880.
- [17] Wilkinson, G.N. (1977). On resolving the controversy in statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 39, 119-171.

La Revista de Ciencias Básicas UJAT
volumen 9 número 2, enero 2011, se imprimió en
Gráficos e Impresiones del Sureste.
Eusebio Castillo 1106, Centro. C.P. 86000.
Villahermosa, Tabasco, MÉXICO
Terminó la edición de esta obra en enero de 2011
se imprimió un tiraje de 500 ejemplares





DIRECTORIO

M.A. Candita Victoria Gil Jiménez
Rectora

M.P.E.S. María Isabel Zapata Vásquez
Secretaria de Servicios Académicos

Dr. José Manuel Piña Gutiérrez
Secretario de Servicios Administrativos

L.C.P. Marina Moreno Tejero
Secretaria de Finanzas

M.C. Eliut Santamaría Mayo
Director de Investigación y Posgrado

Dr. Víctor Castellanos Vargas
Director de la División Académica de Ciencias Básicas



Año Internacional de la
QUÍMICA
2011

