# Operadores compactos en un espacio de Hilbert (sin demostraciones)

Suponemos que $H$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

### Operadores de rango finito

**Definición (operadores de rango finito).** El *rango* del operador $A \in \mathcal{B}(H)$ se define como la dimensión del imagen $A(H)$. Un operador $A$ se llama un *operador de rango finito* si la dimensión de su imagen $A(H)$ es finita. El conjunto de todos los operadores de rango finito se denota con $\mathcal{FR}(H)$.

**1. Lema.** Si $A \in \mathcal{FR}(H)$, entonces $A^* \in \mathcal{FR}(H)$.

**2. Teorema.** $\mathcal{FR}(H)$ es el minimal ideal bilateral en $H$. Además $\mathcal{FR}(H)$ es autoadjunto.

### Espacios métricos precompactos

**Definición (espacio precompacto).** Un espacio métrico es *precompacto* si su completación es un espacio compacto.

**Observación (subconjunto precompacto).** Un subconjunto de un espacio métrico completo es precompacto $\Longleftrightarrow$ su clausura es compacta.

**Definición (espacio totalmente acotado).** El espacio métrico $(X, d)$ es *totalmente acotado* $\Longleftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$ existe una *$\varepsilon$-red finita* $F$ en $X$, i.e. un conjunto finito $F \subset X$ tal que

$$\forall x \in X \qquad \operatorname{dist}(x, F) < \varepsilon.$$

**Criterio de compacidad para espacios métricos.** El espacio métrico es precompacto $\Longleftrightarrow$ es totalmente acotado.

### Operadores compactos: alrededor de definiciones

**Notación (bola unitaria cerrada).** $B_1 := \{x \in H \colon \|x\| \leqslant 1\}$.

**Definición (operadores compactos).** Un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es *compacto*, si el conjunto $A(B_1)$ es precompacto. El conjunto de todos los operadores compactos denotemos con $\mathcal{C}(H)$.

**3. Observación.** En la definición de operadores compactos es suficiente decir que $A$ es lineal. La condición que $A$ es acotado se deduce de la condición que $A(B_1)$ es precompacto.

**4. Lema.** Denotemos con $\mathfrak{T}_w$ la topología débil en $H$. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $A$ es continuo de $(H, \mathfrak{T}_w)$ a $(H, \mathfrak{T}_w)$.

**5. Lema.** Si $A \in \mathcal{B}(H)$, entonces $A(B_1)$ es cerrado en $H$.

**6. Proposición.** Si $A \in \mathcal{C}(H)$, entonces $A(B_1)$ es compacto.

**7. Proposición.** Si $A \in \mathcal{C}(H)$, entonces $A(X)$ es un conjunto precompacto para cualquier $X$ acotado.

### Criterios de compacidad

**8. Teorema (criterio de compacidad en términos de redes).** Un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si para cada red acotada $\{f_i\}_{i \in J}$ en $H$ que converge débilmente a un vector $g$, la red $\{Af_i\}_{i \in J}$ converge al vector $Ag$ en norma.

**9. Lema.** La bola unitaria $B_1$ no es conjunto compacto en $H$ (aquí es importante que $H$ es de dimensión infinita).

**10. Teorema (criterio de compacidad en términos de subespacios de la imagen).** Un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si $A(H)$ no contiene ningún subespacio cerrado de dimensión infinita.

### Ideal de los operadores compactos

**11. Teorema (aproximación de los operadores compactos con los operadores de rango finito).** El conjunto $\mathcal{C}(H)$ es la cerradura de $\mathcal{FR}(H)$ en $\mathcal{B}(H)$.

**12.** $\mathcal{C}(H)$ es el minimal ideal cerrado bilateral en $H$. Además $\mathcal{C}(H)$ es autoadjunto.

**13.** $\mathcal{C}(H)$ es el único ideal cerrado bilateral en $H$ (aquí es importante que $H$ es separable).