# Álgebras de Banach conmutativas unitales. Transformada de Gelfand

En esta sección, $A$ es una álgebra de Banach conmutativa con unidad $e$.

La palabra “ideal” será comprendido en el sentido “ideal propio”: diciendo que “$J$ es un ideal en $A$” suponemos que $J \neq A$.

**1. Álgebra cociente.** Sean $A$ una álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ (no necesariamente un álgebra de Banach) y $J$ un ideal. Construir en manera estandar el álgebra cociente $A/J$. Mostrar que $A/J$ es unital si y solo si $A$ es unital.

**2. Norma en el álgebra cociente.** Sean $A$ una álgebra de Banach con unidad y $J$ un ideal cerrado. Mostrar que

$$\|a + J\| = \inf_{b \in J} \|a + b\| = \inf_{c \in a+J} \|c\|$$

es una norma en $A/J$ y $A/J$ con esta norma es una álgebra de Banach.

**3. Álgebra cociente para ideal no cerrado.** Construir un ejemplo cuando $A$ es una álgebra de Banach conmutativa unital y $J$ es un ideal no cerrado. ¿Es $A/J$ una álgebra de Banach o no?

**Definición (ideal maximal).** Un ideal $J$ se llama *ideal maximal* si $J$ no está contenido en ningún otro ideal.

**4.** Cada ideal maximal es cerrado.

**Definición (funcionales multiplicativos).** Un funcional $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ se llama *funcional multiplicativo* (o *homomorfismo complejo*) si $\varphi$ es lineal, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todos $a, b \in A$ y $\varphi(e) = 1$. Denotemos con $\mathcal{M}(A)$ el conjunto de todas los funcionales multiplicativas sobre $A$.

**5.** Si una funcional $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ cumple la condición $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todos $a, b \in A$ y $\varphi(a) \neq 0$ para algún $a \in A$, entonces $\varphi(e) = 1$.

**6.** Para todos $a \in A$ y $\varphi \in \mathcal{M}(A)$, $\quad \varphi(a) \in \operatorname{sp}(a)$.

**7.** Para todos $\varphi \in \mathcal{M}(A)$, $\quad \|\varphi\| = 1$.

**8.** Para todos $\varphi \in \mathcal{M}(A)$, $\quad \ker \varphi$ es un ideal maximal en $A$.

**9. Teorema de Gelfand-Mazur.** Sea $A$ una álgebra de Banach con unidad tal que $\operatorname{Inv}(A) = A \setminus \{0\}$. Entonces existe isomorfismo $f\colon A \to \mathbb{C}$. Este isomorfismo es isométrico y único.

**10. Lema.** Sea $J$ un ideal maximal en $A$. Entonces el álgebra cociente $A/J$ es homeomorfa a $\mathbb{C}$.

**11. Teorema.** Cada ideal maximal en $A$ es el núcleo de un funcional multiplicativo.

**12.** $\mathcal{M}(A) \neq \varnothing$. (Aquí es importante que $A$ es conmutativa.)

**13.** $\mathcal{M}(A)$ es un subconjunto cerrado de la esfera unital en el espacio dual $A^*$ con la topología débil*.

**Definición (topología de Gelfand).** La topología de Gelfand en $\mathcal{M}(A)$ es la topogía inducida de $A^*$ donde el espacio dual $A^*$ es considerado con la topología débil*.

**14.** Para $\varphi_0 \in \mathcal{M}(A)$, construir una base local en el punto $\varphi_0$ de la topología de Gelfand.

**15.** Para $a \in A$, la función $\hat{a}\colon \mathcal{M}(A) \to \mathbb{C}$, $\hat{a}(\varphi) := \varphi(a)$, es continua.

**Definición (transformada de Gelfand).** $\Gamma_A\colon A \to C(\mathcal{M}(A))$, $\Gamma_A(a) := \hat{a}$.

**16. Teorema.** $\Gamma_A$ es un homomorfismo continuo de los álgebras de Banach, preserva la unidad, $\|\Gamma_A\| \leqslant 1$. Además,

$$a \in \operatorname{Inv}(A) \quad \iff \quad \Gamma_A(a) \in \operatorname{Inv}(C(\mathcal{M}(A))) \quad \iff \quad \varphi(a) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}(A).$$

Por lo tanto, $\operatorname{sp}(a) = \{\varphi(a)\colon a \in \mathcal{M}(A)\}$ y $\mathrm{r}(a) = \|\Gamma_A(a)\|_\infty$.

**17.** Supongamos que $A$ es generada por un elemento $a$ y identidad $e$. Construir un homeomorfismo $\mathcal{M}(A) \to \operatorname{sp}(a)$.

**18.** $\Gamma_A$ es una isometría $\iff$ $\|a^2\| = \|a\|^2$ para todos $a \in A$.

**Definición (radical).** Para un álgebra de Banach conmutativa unital $A$, la intersección de todos ideales maximales se llama *radical* del álgebra y se denota con $\operatorname{Rad}(A)$.

**19.** $\operatorname{Rad}(A) = \ker \Gamma_A = \{a \in A\colon \operatorname{lím}_{n\to\infty} a^n = 0\}$. Es decir, $\operatorname{Rad}(A)$ consiste en todos los elementos *quasinilpotentes*.

**20.** Sea $A$ la subálgebra de $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$ que consiste en todas las matrices de la forma $\left(\begin{smallmatrix} \xi & \eta \\ 0 & \xi \end{smallmatrix}\right)$ donde $\xi, \eta \in \mathbb{C}$. Mostrar que $A$ es conmutativa. Calcular la norma en $A$. Construir $\mathcal{M}(A)$, $\Gamma_A$ y el radical de $A$.

**Note (transformada de Gelfand para las álgebras no conmutativas).** Es posible definir la transformada de Gelfand también para cualquieras álgebras de Banach, no necesáriamente conmutativas. En este caso general los nucleos de las funcionales multiplicativas son *ideales bilaterales maximales*, y cada ideal bilateral maximal tiene esta forma. Pero para las álgebras no conmutativas la transformada de Gelfand no reflecta bien las propiedades de $A$. En particular, la imagen de $A$ al respecto de $\Gamma_A$ es un álgebra conmutativa (como es una subalgebra de $C(\mathcal{M}(A))$), i.e. $\Gamma_A(a)$ y $\Gamma_A(b)$ siempre conmutan incluso el caso cuando $a$ y $b$ no conmutan.

**21. Transformada de Gelfand para $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$.** Mostrar que el único ideal bilateral en $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$ es $\{0\}$, y por lo tanto $\mathcal{M}(\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})) = \varnothing$.