Operatores de Toeplitz con símbolos continuos

Vamos a estudiar el álgebra $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$, i.e. la C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$, generado por los operadores T_a con símbolos continuous, $a \in C(\mathbb{T})$.

Para demostrar el siguiente lema, es cómodo usar los operadores de Hankel y criterio suficiente de su compacidad.

1. Si $a, b \in L^\infty(\mathbb{T})$ y al menos una de estas funciones es continua, entonces $T_{ab} - T_a T_b \in \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$.

2. $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T})) = \{T_a + K \colon a \in C(\mathbb{T}),\ K \in \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))\}$.

3. $\operatorname{Com}(\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))) = \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$.

4. La siguiente sucesión es exacta corta:

$$0 \to \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T})) \to \mathfrak{T}(C(\mathbb{T})) \to C(\mathbb{T}) \to 0.$$

5. Teorema. La aplicación

$$T_a + \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T})) \mapsto a \qquad (a \in C(\mathbb{T}))$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))/\,\mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$ sobre $C(\mathbb{T})$.

Índice e invertibilidad de operadores de Toeplitz con símbolos continuos

6. Sea $a \in C(\mathbb{T})$. Entonces T_a es de Fredholm $\iff$ $0 \notin \mathcal{R}(a)$.

7. $\operatorname{ind}(T_{e_n}) = -n$.

8. Sea $a \in C(\mathbb{T})$ tal que $0 \notin \mathcal{R}(a)$. Entonces

$$\operatorname{ind}(T_a) = -\operatorname{wind}(a).$$

9. Teorema. Sea $a \in C(\mathbb{T})$. Entonces

$$T_a \text{ es invertible} \iff 0 \notin \mathcal{R}(a) \ \wedge\ \operatorname{wind}(a) = 0.$$

10. Sea $a \in C(\mathbb{T})$. Entonces

$$\operatorname{sp}(T_a) = \mathcal{R}(a) \cup \{\lambda \notin \mathcal{R}(a) \colon \operatorname{wind}(a - \lambda) = 0\}.$$