Operadores de Toeplitz con símbolo acotado: conmutadores y álgebras cocientes

Seguimos estudiando operadores de Toeplitz con símbolos acotados. Ya sabemos la fórmula para la norma ($\|T_a\| = \|a\|_\infty$), el teorema de inclusión de espectros, Hartman-Wintner ($\mathcal{ER}(a) \subset \operatorname{sp}(T_a)$), y la fórmula para el rango numérico ($\operatorname{clos}(W(T_a)) = \operatorname{conv}(\mathcal{ER}(a))$).

1. La aplicación $\tau\colon L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$, $\tau(a) = T_a$, es una isometría lineal. Además, $\tau(a^*) = T_a^*$ para todos $a \in L^\infty(\mathbb{T})$.

2. Si $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $T_a^* = T_a$, entonces a es real, i.e. $\mathcal{ER}(a) \subset \mathbb{R}$.

Ideal conmutador

Definición (ideal conmutador). Sea A una álgebra de Banach. El *ideal conmutador* $\operatorname{Com}(A)$ el ideal cerrado minimal de A que contiene el conjunto $\{[a, b]\colon a, b \in A\}$. Aquí $[a, b] := ab - ba$ es el *conmutador* de a y b.

3. Sea A una álgebra de Banach. Entonces el álgebra cociente $A/\operatorname{Com}(A)$ es conmutativa. El ideal $\operatorname{Com}(A)$ es el ideal cerrado minimal con esta propiedad: si J es un ideal cerrado en A y A/J es conmutativa, entonces $\operatorname{Com}(A) \subset J$.

4. Sea A una C^*-álgebra. Entonces el ideal $\operatorname{Com}(A)$ es autoadjunto y el álgebra cociente $A/\operatorname{Com}(A)$ es una C^*-álgebra.

Álgebras generadas por operadores de Toeplitz, conmutadores y álgebras cocientes

5. Calcular T_{ab}, $T_a T_b$ y $T_b T_a$ para $a = e_1$ y $b = e_{-1}$.

6. La aplicación τ no es multiplicativa.

7. Condiciones suficientes para $T_a T_b = T_{ab}$.

- $T_a T_b = T_{ab}$ si $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $b \in H^\infty(\mathbb{T})$;
- $T_a T_b = T_{ab}$ si $\bar{a} \in H^\infty(\mathbb{T})$ y $b \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Definición. Para $S \subset L^\infty(\mathbb{T})$, denotemos por $\mathfrak{T}(S)$ a la subálgebra (cerrada) de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ generada por $\{T_a\colon a \in S\}$.

8. Si S es un subespacio de $L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $\bar{a} \in S$ para cada $a \in S$, entonces $\mathfrak{T}(S)$ es una C^*-álgebra.

9. Teorema. Sean $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ y $\tau_c\colon L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathfrak{T}/\operatorname{Com}(\mathfrak{T})$ la aplicación inducida por la aplicación τ, i.e.

$$\tau_c(a) = T_a + \operatorname{Com}(\mathfrak{T}).$$

Entonces τ_c es un $*$-isomorfismo isométrico.

10. Corolario. Existe un $*$-homomorfismo isométrico ρ tal que

$$0 \to \operatorname{Com}(\mathfrak{T}) \to \mathfrak{T} \xrightarrow{\rho} L^\infty(\mathbb{T}) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y $\rho \circ \tau = \mathrm{id}$.

Operadores de Toeplitz y operadores compactos

11. La C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$ generada por T_{e_1} coincide con $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$.

12. El álgebra $\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))$ es irreducible.

13. $\operatorname{Com}(\mathfrak{T}(C(\mathbb{T}))) = \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$.

14. $\operatorname{Com}(\mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))) \supset \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$.

15. Existe un $*$-homomorfismo $\zeta\colon \mathfrak{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\,\mathcal{C}(H^2(\mathbb{T})) \to L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $\rho = \zeta \circ \pi$ donde π es la proyección natural.

16. Si $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y T_a es un operador de Fredholm, entonces a es invertible en L^∞.

$$\mathcal{ER}(a) \subset \operatorname{sp}_{ess}(T_a).$$

17. Si $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $K \in \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$, entonces $\|T_a + K\| \geqslant \|T_a\|$.

18. Si $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $T_a \in \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$, entonces $a = 0$.

19. Lema de Coburn. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, $a \neq 0$. Entonces $\ker T_a = \{0\}$ ó $\ker T_a^* = \{0\}$.

20. Teorema. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces T_a es invertible $\iff$ T_a es de Fredholm y $\operatorname{ind}(T_a) = 0$.

21. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\operatorname{sp}(T_a) = \operatorname{sp}_{ess}(T_a) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}_{ess}(T_a)\colon\ \operatorname{ind}(T_a) \neq 0\}.$$