Teorías Topológicas Cuánticas de Campos para Principiantes

ó

The Unreasonable Effectiveness of Physics in Mathematics

Raúl Alvarez Patiño

Departamento de Matemáticas
CINVESTAV

Septiembre 11, 2013

Teoría de Yang-Mills - Ecuaciones

Supongamos que $E \to M^n$ es un G-haz vectorial sobre una n-variedad riemanniana (M^n, g) y A es una conexión compatible con la acción de G. Las ecuaciones de Yang-Mills para A son

$$d_A F_A = 0$$
$$d_A \star F_A = 0$$

Donde $F_A = dA - A \wedge A$ es la curvatura de A y $d_A = d + A$. Cuando $G = U(1)$ y E es un haz de lineas complejo, las ecuaciones de Yang-Mills se reducen a las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica.

Teoría de Yang-Mills - Simetrías

Yang-Mills es un ejemplo de una teoría de Norma. El grupo de norma $\mathcal{G}$ es el grupo de simetrías de E como G-haz sobre M^n, es decir, $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}_G(E)$. Este grupo actúa por conjugación en el espacio de configuraciones $\Omega^2(M^n; \mathrm{Ad}(E))$.

Si $g \in \mathcal{G}$ y $B = gAg^{-1}$ entonces

$$d_B F_B = g\,(d_A F_A)\,g^{-1}$$

En pocas palabras, el conjunto de soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills es invariante bajo transformaciones de norma.

Yang-Mills en 4 dimensiones - ¡$4-2=2$!

El operador de Hodge $\star : \Omega^p(M^n; \mathrm{Ad}(E)) \to \Omega^{n-p}(M^n; \mathrm{Ad}(E))$ es especialmente simétrico en cuatro dimensiones.

Es un operador de $\Omega^2(M^n; \mathrm{Ad}(E))$ en si mismo con espectro discreto $\{\pm 1\}$. Por tanto, en cualquier 4-variedad riemanniana, las ecuaciones de Yang-Mills admiten soluciones de la forma

$$\star F_A = \pm F_A$$

Teoría de Yang-Mills en 4 dimensiones - Instantones

Ahora nos concentraremos en el caso en el que $G = SU(2)$ y E es un haz complejo de rango 2. En este caso, las configuraciones $\star F_A = F_A$, llamadas instantones, son las soluciones clásicas de la teoría de Yang-Mills pues minimizan la energía

$$S_{YM} = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\big(F_A \wedge \star F_A\big) = \int_{M^4} |\, F_A^+ \,|^2 + |\, F_A^- \,|^2$$

Esto es consecuencia de la desigualdad $8\pi^2 c_2(E) \leq S_{YM}$, donde

$$8\pi^2 c_2(E) = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\big(F_A \wedge F_A\big) = \int_{M^4} |\, F_A^+ \,|^2 - |\, F_A^- \,|^2$$

Invariantes de Donaldson

A partir del moduli de instantones $\mathcal{M}_{ASD}$ (modulo equivalencia de norma) pueden construirse invariantes de la estructura suave de M^4. [S. Donaldson $\sim$ 1986]

$$\mu : H_k(M^4) \longrightarrow H^{4-k}(\mathcal{M}_{ADS})$$

La física entra en escena...

Moraleja: el límite clásico de Yang-Mills junto con la “simetría de norma” nos enseñan mucho del mundo cuatro dimensional.

¿El limite cuántico también sera relevante? [M. Atiyah]

Figura: Sir Michel Atiyah 1929-

La física entra en escena...

La respuesta a la pregunta de Atiyah es SÚPER-afirmativa

Algunos observables de $\mathcal{N} = 2$ SYM "torcida" codifican por completo la información contenida en los invariantes de Donaldson. [E. Witten 1988]

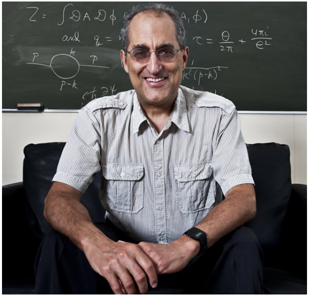

Figura: Edward Witten 1951-

Teoría Clásica de Campos en corto

Una Teoría Clásica de Campos (TCC) consiste de

- Espacio-tiempo: Una variedad Pseudo-riemanniana (M^4, g) de dimensión 4.
- Campos: Secciones de un haz vectorial $E \to M^4$.
- Acción: Funcional polinomial de los campos $S : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$.
- Simetrías: La acción de un grupo en el espacio de campos $G \curvearrowright \mathcal{C}$.

Teoría Cuántica de Campos - Integral de Feynman

La cuantización consiste en asignar a una TCC un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ que representa estados y que porta algunas de las simetrías de la TCC. En esta descripción, los procesos físicos reales se modelan como operadores lineales auto-adjuntos $\mathcal{O} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Feynman descubrió que la probabilidades de que ocurran los procesos representados por una familia de operadores $\{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k\}$ en los eventos $x_1, \ldots, x_k \in M^4$ es

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) \rangle = \int \mathcal{D}X \, \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) e^{-S(X)}$$

Teoría Cuántica de Campos - Integral de Feynman

La cuantización consiste en asignar a una TCC un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ que representa estados y que porta algunas de las simetrías de la TCC. En esta descripción, los procesos físicos reales se modelan como operadores lineales auto-adjuntos $\mathcal{O} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Feynman descubrió que la probabilidades de que ocurran los procesos representados por una familia de operadores $\{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k\}$ en los eventos $x_1, \ldots, x_k \in M^4$ es

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) \rangle = \int \mathcal{D}X \, \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(x_k) e^{-S(X)}$$

¡LA CUANTIZACIÓN ES UN ARTE, NO UN FUNTOR!

Teoría Topológica de Campos

Una teoría cuántica de campos es topológica (TQFT) si contiene una familia de operadores $\{\, \mathcal{O}_i \,|\, 1 \leq i \leq m \}$ cuyas funciones de correlación son independientes de la métrica $g_{\mu\nu}$

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left\langle \prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}_i \right\rangle = 0$$

Tales observables se llaman topológicos. Existen dos (ó tres) tipos de TQFT:

1. Tipo Schwarz $\leftrightsquigarrow$ nada depende de $g_{\mu\nu}$
2. Tipo Witten $\leftrightsquigarrow$ algunas cosas dependen de $g_{\mu\nu}$
3. ¿Tipo Atiyah-Segal (Axiomática) $\leftrightsquigarrow$ Cobordismo?

Teoría Topológica de Campos (Según Witten)

En las teorías tipo Witten existe una simetría topológica δ no anómala que actúa en los campos de manera tal que el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} := \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Pueda escribirse como

$$-\delta G_{\mu\nu}$$

Para algún tensor $G_{\mu\nu}$.

Teoría Topológica de Campos (Según Witten)

Los operadores aniquilados por δ representan observables topológicos.

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left\langle \prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}_i \right\rangle &= \left\langle \prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}_i \cdot T_{\mu\nu} \right\rangle \\ &= -\left\langle \prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}_i \cdot \delta G_{\mu\nu} \right\rangle \\ &= \pm\left\langle \delta\left(\prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}_i \cdot G_{\mu\nu}\right) \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Teoría Topológica de Campos (Según Witten)

También los operadores δ-exactos se "desacoplan de la teoría" por que sus funciones de correlación se anulan.

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}_1 \ldots \mathcal{O}_k \, \delta\mathcal{F} \rangle &= \int \mathcal{D}X \, \mathcal{O}_1 \ldots \mathcal{O}_k \, \delta\mathcal{F} e^{S(X)} \\
&= -\frac{1}{g^3} \int \mathcal{D}X \, \delta \left(\mathcal{O}_1 \ldots \mathcal{O}_k \, \mathcal{F} \right) \, e^{S(X)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Los cálculos anteriores se pueden entender con todo rigor con el formalismo de Mathai-Quillen.

Teoría Topológica de Campos (Según Witten)

Por ejemplo, si la acción $S = S(X)$ es δ-exacta entonces las funciones de correlación son independientes de las constantes de acoplamiento g

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g}\langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k \rangle &= \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k\, \frac{\delta}{\delta g} e^{-\frac{1}{g^2}S(X)} \\
&= -\frac{1}{g^3}\int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k\, S(X)\, e^{-\frac{1}{g^2}S(X)} \\
&= -\frac{1}{g^3}\int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k\, \delta\mathcal{F}\, e^{-\frac{1}{g^2}S(X)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que en una TQFT no hay correcciones cuánticas. Todo esta determinado por las soluciones clásicas y por tanto la aproximación semi-clásica es exacta.

Teoría Topológica de Campos (Según Witten)

Por ejemplo, si la acción $S = S(X)$ es δ-exacta entonces las funciones de correlación son independientes de las constantes de acoplamiento g

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g}\langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k \rangle &= \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k\, \frac{\delta}{\delta g} e^{-\frac{1}{g^2} S(X)} \\
&= -\frac{1}{g^3} \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k\, S(X)\, e^{-\frac{1}{g^2} S(X)} \\
&= -\frac{1}{g^3} \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_k\, \delta \mathcal{F}\, e^{-\frac{1}{g^2} S(X)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En otras palabras, las integrales funcionales se localizan en una sub-variedad de dimensión finita, justo como en la teoría de intersección.

TQFT $\leftrightsquigarrow$ Cohomología Equivariante

Por tanto debemos considerar a los observables topológicos como clases de "cohomología" asociadas a δ

$$\{\,\mathcal{O}_i \,|\, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \frac{\ker \delta}{\mathrm{Im}^* \delta}$$

¿Lo anterior implica que $\delta^2 = 0$? No en general

$$\delta^2 = \text{transformación de norma}$$

Básicamente δ es la diferencial equivariante asociada a la acción del grupo de simetrías de la teoría en el espacio de campos.

TQFT - Invariantes Topológicos

Supongamos que contamos con un operador $\mathcal{O}^{(0)}$ en la cohomología de δ. Si podemos encontrar soluciones a la ecuación de descendientes topológicos de $\mathcal{O}^{(0)}$

$$d\Theta^{(k)} = \delta\Theta^{(k+1)} \quad k \geq 0$$

Entonces podemos construir los siguientes observables para cada elemento $\gamma \in H_n(M^4; \mathbb{R})$

$$\mathcal{O}_n^0(\gamma) := \int_\gamma \Theta^{(n)}$$

Que son topológicos

$$\delta\mathcal{O}_n^0(\gamma) := \int_\gamma \delta\Theta^{(n)} = \int_\gamma d\Theta^{(n-1)} = \int_{\partial\gamma} \Theta^{(n-1)} = 0$$

TQFT - Invariantes Topológicos

Inversamente si γ es homologicamente trivial, esto es, $\gamma = \partial\Gamma$ entonces

$$\mathcal{O}_n^0(\gamma) = \int_\gamma \Theta^{(n)} = \int_{\partial\Gamma} \Theta^{(n)} = \int_\Gamma d\Theta^{(n)} = \delta\mathcal{O}_{n+1}^0(\Gamma)$$

En otras palabras, las ecuaciones de descendencia topológica establecen una correspondencia entre clases de homología en M^4 y clases de δ-cohomología. Esta es la manera en que Donaldson construye sus invariantes

POR LO TANTO, DEBEMOS RESOLVER LAS ECUACIONES DE DESCENDENCIA TOPOLÓGICA.

TQFT - Invariantes Topológicos

Las ecuaciones de descendencia topológica admiten una solución canónica en una TQFT del tipo de Witten.

EL operador de momento P_μ se escribe en una TQFT de tipo Witten como $-\delta G_{0\mu} := -\delta G_\mu$. En particular, $G_\mu \in \Omega^1_{M^4}$. Dado un operador escalar $\mathcal{O}^{(0)}$ que representa una clase de δ-cohomología construimos descendientes

$$\mathcal{O}^{(k)} = \frac{1}{k!} G_{\mu_1} G_{\mu_2} \cdots G_{\mu_k} \mathcal{O}^{(0)} \, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k}$$

Usando que $P_\mu = -\partial_\mu$ concluimos que estos operadores satisfacen la ecuación de descendencia topológica.

SUSY con $\mathcal{N}$ generadores en 4 dimensiones euclidianas

$$\{\, Q_{\alpha u}\,,\, \overline{Q}_{\dot\beta w}\,\} = 2\,\epsilon_{uw}\,\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu \qquad \{\, Q_{\alpha u}\,,\, Q_{\beta w}\,\} = C_{\alpha\beta} Z_{uw}$$

$$[\, P_\mu\,,\, \overline{Q}_{\dot\alpha u}\,] = 0 \qquad [\, P_\mu\,,\, Q_{\alpha u}\,] = 0$$

$$[\, J_{\mu\nu}\,,\, \overline{Q}^{\dot\alpha u}\,] = -(\overline{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\overline{Q}^{\dot\beta u} \qquad [\, J_{\mu\nu}\,,\, Q_{\alpha u}\,] = -(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}\,Q_{\beta u}$$

Donde ahora las matrices de Pauli son

$$\sigma^\mu = (\,\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sqrt{-1}\,\mathrm{id}\,) \qquad \overline{\sigma}^\mu = (\,-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3, \sqrt{-1}\,\mathrm{id}\,)$$

$$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_{\alpha}{}^{\beta}$$

$$(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} = \frac{1}{4}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}$$

SUSY con $\mathcal{N}$ generadores en 4 dimensiones euclidianas

El grupo de rotaciones en 4 dimensiones euclidianas $SO(4)$ es localmente isomorfo a $SU_+(2) \times SU_-(2)$. Esto quiere decir que en M^4 tenemos la correspondencia biespinorial

$$J_{\mu\nu} \mapsto J_{\alpha\dot{\alpha}\,,\,\beta\dot{\beta}} := \epsilon_{\alpha\beta}\,\overline{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,M_{\alpha\beta}$$

Con $\overline{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ el generador de $SU_+(2)$ y $M_{\alpha\beta}$ el generador de $SU_-(2)$

Torcimiento de SUSY $\mathcal{N}=2$ en 4 dimensiones

El caso $\mathcal{N}=2$ es excepcionalmente especial pues SUSY es invariante bajo

$$\underbrace{SU_+(2)\times SU_-(2)}_{\text{Rotaciones}}\times\underbrace{SU(2)_R\times U(1)_R}_{\text{Interno}}$$

Esto nos permite identificar los índices de isospin correspondientes a $SU(2)_R$ con índices espacio-temporales correspondientes a $SU_+(2)$

$$K_{\dot\alpha\dot\beta}:=M_{\dot\alpha\dot\beta}-B_{\dot\alpha\dot\beta}$$

Donde $B_{\dot\alpha\dot\beta}$ es el generador de la simetría $SU(2)_R$.

Torcimiento de SUSY $\mathcal{N} = 2$ en 4 dimensiones

Bajo la definición en la transparencia anterior

$$\overline{Q}_{\dot{\alpha}u} \mapsto \overline{Q}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \qquad\qquad Q_{\alpha u} \mapsto Q_{\alpha\dot{\beta}}$$

Se tiene la súper carga topológica

$$\overline{\mathcal{Q}} := \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\overline{Q}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \overline{Q}_{\dot{1}\dot{2}} - \overline{Q}_{\dot{2}\dot{1}}$$

Que es un escalar bajo el nuevo grupo de simetría

$$\left[\, K_{\alpha\beta}\,,\, \overline{\mathcal{Q}} \,\right] = 0$$

La súper carga $\mathcal{Q}$ genera la simetría topológica δ.

FIN

GRACIAS