1. Funciones Zeta Locales y cuerdas p-ádicas

En esta plática hablaremos de la conexión entre funciones zeta locales de Igusa y amplitudes de cuerdas del tipo Koba-Nielsen p-ádicas. De esta relación, surge el estudio de la siguiente función zeta local:

$$\boldsymbol{Z}^{(N)}\left(\underline{\boldsymbol{s}}\right)=\int_{\mathbb{Q}_p^{N-3}}\prod_{i=2}^{N-2}\left|x_i\right|_p^{s_{1i}}\left|1-x_i\right|_p^{s_{(N-1)i}}\prod_{2\leq i<j\leq N-2}\left|x_i-x_j\right|_p^{s_{ij}}\prod_{i=2}^{N-2}dx_i, \tag{1.1}$$

donde $\underline{\boldsymbol{s}}=(s_{ij})\in\mathbb{C}^D$, $\prod_{i=2}^{N-2}dx_i$ es la medida de Haar normalizada de $\mathbb{Q}_p^{N-3}$, $N\geq 4$ y $D=\frac{(N-3)(N-4)}{2}+2\left(N-3\right)$. En los artículos relacionados con las amplitudes de cuerdas p-ádicas, se han estudiado este tipo de integrales sin considerar su convergencia, i.e. el problema de la regularización de amplitudes del tipo Koba-Nielsen, o más generalmente su holomorfía. Más aún, la convergencia de estas integrales no ha sido establecida en la teoría de las funciones zeta locales. En trabajo conjunto con el Dr. Wilson Zúñiga y el Dr. Hugo Compeán [1], demostramos que las integrales (1.1) son convergentes y que tienen continuaciones meromorfas como funciones racionales a todo el espacio $\mathbb{C}^D$, resolviendo así, el problema de regularización de las amplitudes mencionadas. El método que utilizamos consiste en descomponer el dominio de integración, de tal forma que $\boldsymbol{Z}^{(N)}\left(\underline{\boldsymbol{s}}\right)$ se escribe como una suma de integrales. Estas integrales resultan ser funciones zeta locales de Igusa que se pueden calcular recursivamente usando métodos de integración p-ádica.

Así, las amplitudes de cuerdas son esencialmente funciones zeta locales, y por lo tanto objetos algebro-geométricos que pueden ser estudiados sobre varios campos, por ejemplo $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}\left((t)\right)$, y en cada uno de estos campos, estos objetos tienen propiedades matemáticas similares.

Una consecuencia del método que utilizamos es que nuestros resultados siguen siendo válidos si reemplazamos $\mathbb{Q}_p$ por $\mathbb{F}_q\left((t)\right)$, el campo de series formales de Laurent sobre un campo finito $\mathbb{F}_q$.

References

[1] Bocardo-Gaspar M., García-Compeán H., Zúñiga-Galindo W. A., Regularization of p-adic string amplitudes, and multivariate local zeta functions (2016).