Espacios de Bergman Pesados ${}_s\mathcal{A}_q^p$

Luis Javier Carmona Lomeli

Para $0 < p < \infty$ y $-1 < q < +\infty$ se define el *espacio clásico de Bergman* $\mathcal{A}_q^p = \mathcal{A}_q^p(\mathbb{D})$ del disco unitario, como el conjunto de las funciones analíticas en $L^p(\mathbb{D}, dA_q)$, donde

$$dA_q(z) = (q+1)(1-|z|^2)^q \, dA(z) \ .$$

y $dA(z)$ es la medida de área usual en $\mathbb{D}$.

Sea $\mathcal{H}$ el espacio de funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Para $0 < p < \infty$, $-2 < q < \infty$, $0 \leq s < \infty$ y $f \in \mathcal{H}$, se define

$$l_{p,q,s}(f)(z) := \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \ (1 - |\varphi_z(w)|^2)^s \ dA_q(w) \ ,$$

donde $dA_q(w) = (1-|w|^2)^q \ dA(w)$ y φ_z es una transformación de Möbius de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que intercambia a z y 0. Una motivación para la definición de los espacios de Bergman pesados ${}_s\mathcal{A}_q^p$, dados por

$${}_s\mathcal{A}_q^p := \{f \in \mathcal{H} : \sup_{z \in \mathbb{D}} l_{p,q,s}(f)(z) < \infty\}$$

se obtiene de la propia definición del espacio clásico de Bergman al observar lo siguiente. Si $0 < s < \infty$ y $z \in \mathbb{D}$ al añadir el peso $(1 - |\varphi_z(w)|^2)^s$ en la definición del espacio de Bergman, se tiene para $f \in \mathcal{A}_q^p$

$$\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1 - |\varphi_z(w)|^2)^s \, dA_q(w) < \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \, dA_q(w) \ ,$$

es decir, el espacio de Bergman es un subespacio de toda una familia de espacios de Banach $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, con $d\mu = d\mu(s, z) = (1 - |\varphi_z(w)|^2)^s \, dA_q(w)$, que se obtienen al variar los parámetros $0 < s < \infty$ y $z \in \mathbb{D}$. La estimación integral anterior permite considerar una familia restringida a un parámetro, a saber el conjunto de funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1 - |\varphi_z(w)|^2)^s \, dA_q(w) \leq \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \, dA_q(w) \ ,$$

para $0 < s < 1$.

En esta plática se presentarán algunas de sus propiedades, caracterizaciones y la relación que tiene con otros espacios de funciones analíticas.