Introducción a la geometría tropical

Luis Contreras Moreno   Omar Alvarado Garduño
Humberto Muñoz George   Sergio Gerardo Gómez Galicia

Seminario de estudiantes

September 14, 2023

Introduction

Algunos temas de los que vamos a hablar:

1. Primeras definiciones
2. Ejemplos de tropicalización
3. Álgebra lineal tropical y algunas aplicaciones
4. Curvas tropicales

Historia

El adjetivo **tropical** fue acuñado por matemáticos franceses, en particular Jean-Erick Pin, en honor a su colega brasileño Imre Simon, quien fue pionero en el uso del álgebra min-plus en la teoría de la optimización.

Definición

Considere el **semianillo tropical** $\mathbb{T} := (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ donde:

$$x \oplus y := min(x, y) \qquad\qquad x \odot y := x + y$$

En pocas palabras, la **suma tropical** de dos números es su mínimo y el **producto tropical** de dos números es su suma usual. [4]

Axiomas

La suma y el producto son **conmutativos**

$$x \oplus y = y \oplus x \qquad\qquad x \odot y = y \odot x$$

Se mantiene la **distributividad**

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$$

Ambas operaciones tienen un **elemento identidad**

$$x \oplus \infty = x \qquad\qquad x \odot 0 = x$$

Además

$$x \odot \infty = \infty \qquad\qquad x \oplus 0 = \begin{cases} 0 & si \quad x \geq 0 \\ x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Operaciones tropicales

$$3 \odot (4 \oplus 5) = 3 \odot 4 \oplus 3 \odot 5 = 7 \oplus 8 = 7$$

Operaciones tropicales con matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Observaciones

En la aritmética tropical **no existe** la "**resta tropical**", es decir, no existe un número x que podamos llamar "13 menos 4" porque la ecuación $4 \oplus x = 13$ **no** tiene solución.
La **división tropical** está definida como la resta usual.

Observaciones

El **semianillo tropical** $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ satisface todos los axiomas de un anillo (y campo) a excepción de la existencia del inverso aditivo, de ahí su nombre semianillo tropical.

Monomios

Sean $x_1, x_2, .., x_n$ variables. Un **monomio tropical** es cualquier producto de estas variables donde es válido la repetición. Por comodidad podemos escribir:

$$x_2 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_4 \odot x_2 \odot x_3 \odot x_2 = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4$$

Un monomio es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Si evaluamos esta función con la aritmetica clásica, obtenemos una función lineal:

$$x_2 + x_1 + x_3 + x_1 + x_4 + x_2 + x_3 + x_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$

Definición

Un **polinomio tropical** es una combinación lineal finita de monomios tropicales

$$p(x_1, ..., x_n) = a_1 \odot x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} \oplus a_2 \odot x_1^{j_1} x_2^{j_2} ... x_n^{j_n} \oplus ... \oplus a_n \odot x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$$

Donde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ y $i_1, j_1, k_1, ... \in \mathbb{Z}$

Polinomio tropical

Un polinomio tropical representa una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Cuando evaluamos esta función en la aritmetica usual obtenemos el mínimo de una colección de funciones lineales

$$p(x_1, ..., x_n) = min(a_1 + i_1 x_1 + ... + i_n x_n, ..., a_n + k_1 x_1 + ... + k_n x_n)$$

Polinomio tropical

La función $p : \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tiene las tres propiedades importantes:

1. p es continua,
2. p es lineal por partes con un número finito de partes, y
3. p es cóncava: $p\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \geq \frac{1}{2}(p(x)+p(y)) \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$

Lema

Los polinomios tropicales en n variables $x_1, x_2, .., x_n$ son precisamente las funciones cóncavas lineales por partes en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes enteros.

Ejemplo

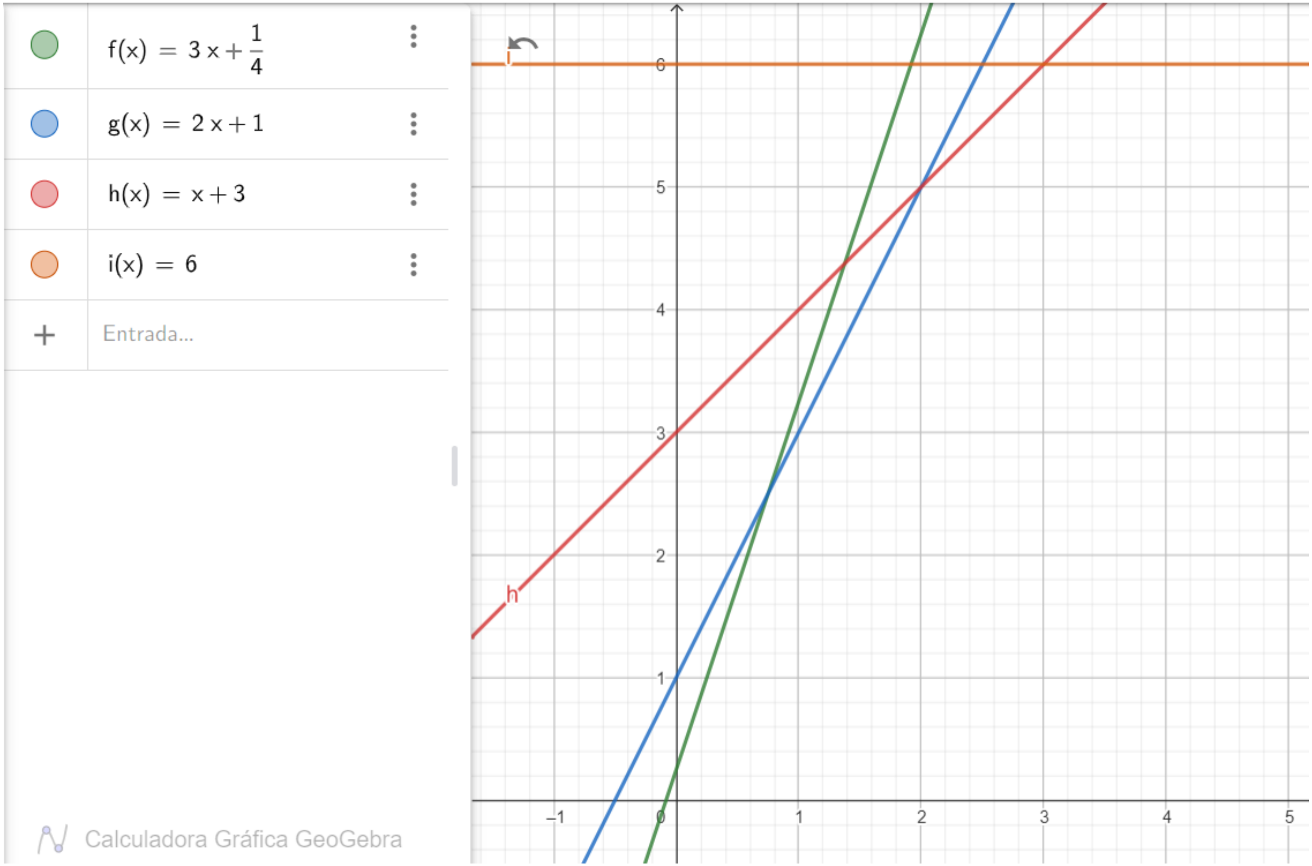
Examinemos el siguiente polinomio en una variable:

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$$

Evaluando en la aritmetica usual:

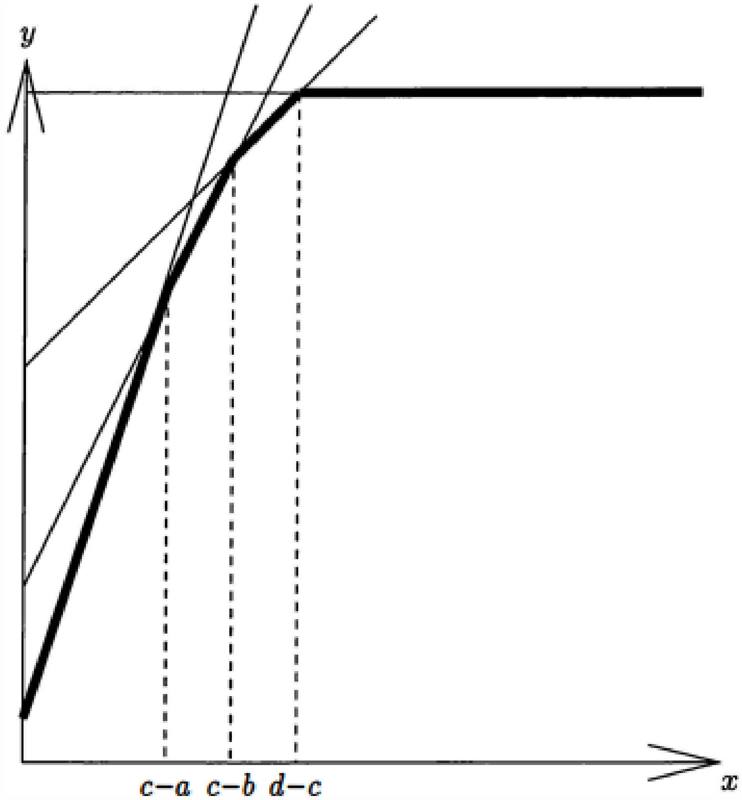
$$p(x) = min(3x + a, 2x + b, x + c, d)$$

Ejemplo



$f(x) = 3x + \frac{1}{4}$
$g(x) = 2x + 1$
$h(x) = x + 3$
$i(x) = 6$
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra
h
i
−1
0
1
2
3
4
5
6

Ejemplo



Raíces de un polinomio

Las cuatro líneas contribuyen si

$$b - a \leq c - b \leq d - c \tag{1}$$

Estos tres valores de x son los puntos donde p(x) no es lineal, este polinomio tiene una factorización en tres factores lineales:

$$p(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)) \odot (x \oplus (d - c))$$

Los tres puntos de ruptura (1) de la gráfica se llaman raíces del polinomio cúbico de p(x).

Definición

Las raíces de un polinomio tropical p son los números reales donde la gráfica de p no es diferenciable

Fórmula cuadrática

Sea $p = a \odot x^2 \oplus b \odot x \oplus c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{las raíces de } p \text{ son } = \begin{cases} b - a, c - b & si \quad 2b \leq a + c \\ \\ \dfrac{c-a}{2} & si \quad 2b > a + c \end{cases}$$

Además

$$p = x^2 \oplus a \odot x \oplus b = \begin{cases} (x \oplus a) \odot (x \oplus (b - a)) & si \quad 2a \leq b \\ \\ \left(x \oplus \dfrac{b}{2}\right)^2 & si \quad 2a > b \end{cases}$$

Observaciones

Por ejemplo

$$x^2 \oplus 17 \odot x \oplus 2 = x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 2 = (x \oplus 1)^2$$

Formula cúbica tropical

¿Cuáles son las raíces del polinomio p=a$\odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$?

Formula cúbica tropical

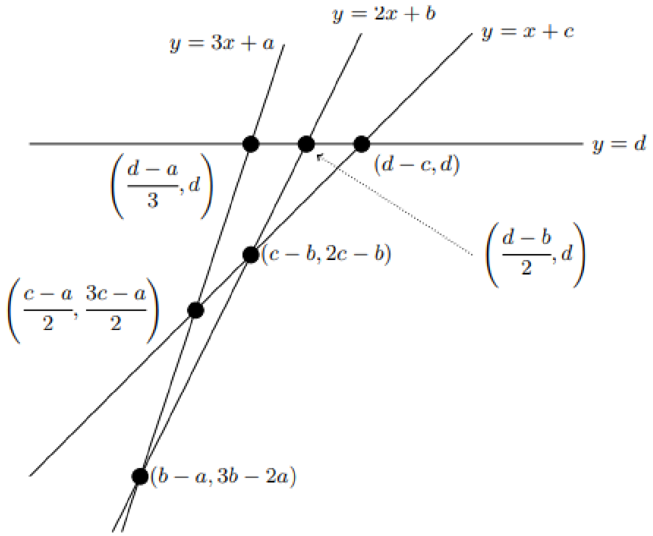
¿Cuáles son las raíces del polinomio p=a$\odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$?.
En la aritmetica usual:

$$p = min(3x + a, 2x + b, x + c, d)$$

Formula cúbica tropical

¿Cuáles son las raíces del polinomio p=a$\odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$?.
En la aritmetica usual:

$$p = min(3x + a, 2x + b, x + c, d)$$



Formula cúbica tropical

¿Cuáles son las raíces del polinomio $a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$?

$$= \begin{cases} b-a, c-b, d-c & si \quad 2b \leq a+c, d \geq 2c-b \\ b-a, \dfrac{d-b}{2} & si \quad 2b \leq a+c, d \leq 2c-b \\ \dfrac{c-a}{2}, d-c & si \quad 2b \geq a+c, d \geq 2c-b \\ \dfrac{d-a}{3} & si \quad 2b \geq a+c, d \leq 2c-b \end{cases}$$

Teorema fundamental del álgebra

Toda función polinómica tropical $f(x)$ de grado n se puede escribir de manera única como el producto de n funciones lineales tropicales $x \oplus c_i$ por una constante.

Observaciones

- **Nota:** Dos polinomios diferentes pueden representar la misma función.
- La factorización uńica de polinomios tropicales se cumple en una variable, pero ya no se cumple en dos o más variables:

$$(x \oplus 0) \odot (y \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus 0) = (x \oplus x \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus y \oplus 0)$$

Álgebra lineal tropical

Sea V un conjunto no vacío, decimos que V es un **módulo tropical ($\mathbb{T}$- módulo)** si en V están definidas

$$+ : V \times V \to V \text{ y } \bullet : \mathbb{T} \times V \to v$$

Que satisfacen:
1.- $(V, +)$ es un monoide.
2.- $(a \odot b) \bullet v = a \bullet (b \bullet v)$, para todo $a, b \in \mathbb{T}$ y $v \in \mathbb{T}$
3.- $(a \oplus b) \bullet v = (a \bullet v) + (b \bullet v)$, para todo $a, b \in \mathbb{T}$ y $v \in \mathbb{T}$
4.- $a \bullet (v_1 + v_2) = (a \bullet v_1) + (a \bullet v_2)$, para todo $a \in \mathbb{T}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{T}$
5.- $0 \bullet v = v$, para todo $v \in V$ [3]

Ejemplo.- Sea

$$\mathbb{T}^n := \{(t_1, \ldots t_n) : t_i \in \mathbb{T}, \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Definiendo $+ : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ como

$$(t_1, \ldots, t_n) + (l_1, \ldots l_n) := (t_1 \oplus l_1, \ldots, t_n \oplus l_n)$$

y $\bullet : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ como

$$a \bullet (t_1, \ldots t_n) := (a \odot t_1, \ldots, a \odot t_n)$$

podemos verificar que $(\mathbb{T}^n, +, \bullet)$ es un módulo tropical.

Bases tropicales

Sea $(V, +, \bullet)$ un módulo tropical, Una **base tropical** para V es un conjunto mínimal de vectores tal que cualquier elemento de V puede escribirse como una combinación lineal tropical de sus elementos.

Proposición.- Toda base de $\mathbb{T}^n$ tiene la forma $e_1, \ldots, e_n$, donde e_i tiene todas las coordenadas a excepción de la $i-$ésima, con valor $+\infty$

Transformaciones lineales tropicales

Dados V y W dos módulos tropicales, decimos que $L : V \to W$ es una **transformación lineal tropical** si

$$L(a \bullet_V u_1 +_V b \bullet_V u_2) = a \bullet_W L(u_1) +_W b \bullet_W L(u_2)$$

para cada $a, b \in \mathbb{T}$ y $u_1, u_2 \in V$.

Ejemplo.-

Sea $L : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ una transformación lineal tropical, dado $x \in \mathbb{R}$

$$L(x) = L(x \odot 0) = x \odot L(0) = x + T(0)$$

Asi $L(0) \neq \infty$ implica que T es precisamente una traslación.

Imagen y Kernel de una transformación lineal tropical

Sea $L : V \to W$ una transformación lineal tropical, definimos su **imagen** como

$$Im(L) := \{w \in W : \exists v \in V \text{ t.q. } L(v) = w\}$$

Se puede probar que $Im(L)$ es un submódulo tropical de W.
El caso del kernel resulta más dificil, considere $L : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ lineal tropical tal que $L(0) \neq \infty$, entonces la ecuación

$$L(x) = \infty$$

tiene única solución $x = \infty$

Matrices y Determinantes tropicales

Naturalmente tendremos la noción de matriz tropical (matriz cuyas entradas pertenecen a $\mathbb{T}$), al conjunto de matrices tropicales de tamaño $m \times n$ lo denotaremos por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$.
1) Dadas $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, definimos su **suma (tropical)** de forma usual (entrada por entrada).
2) Dadas $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ y $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{T})$ definimos su **producto tropical** como la matriz $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{M}_{m\times r}(\mathbb{T})$ cuyas entradas están dadas por

$$c_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{i,k} \odot b_{k,j}$$

Matrices y Determinantes tropicales

Sea $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{T})$ se define su **determinante tropical** como

$$Tropdet(A) := \bigoplus_{\sigma\in S_n} a_{1,\sigma(1)} \odot \ldots \odot a_{n,\sigma(n)} = \min_{\sigma\in S_n}\{a_{1,\sigma(1)} + \ldots a_{n,\sigma(n)}\}$$

Ejemplos.- 1.- Sea $A = \begin{bmatrix} \infty & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ entonces

$$Tropdet(A) := (\infty \odot 4) \oplus (5 \odot 3) = \min\{\infty, 8\} = 8$$

2.- Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ entonces $Tropdet(A) = 6$ y $Det(A) = -7$

Matrices y Determinantes tropicales

Una matriz tropical M se dice **singular** si el mínimo en los factores lineales del determinante es asumido por lo menos dos veces.

Ejemplos.

1.- Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces A es singular siempre que $a + d = b + c$, así por ejemplo la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es singular

2.- Si $Tropdet(A) = +\infty$ entonces A es singular.

Matrices y Determinantes tropicales

Sea A una matriz tropical de tamaño $m \times n$ se define el **kernel** de A como el conjunto de vectores tropicales en $\mathbb{T}^n$ tales que el mínimo

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{a_{1,1} + v_1, \dots a_{1,n} + v_n\} \\ \vdots \\ \min\{a_{m,1} + v_1, \dots a_{m,n} + v_n\} \end{bmatrix}$$

se alcanza al menos dos veces

Matrices y Determinantes tropicales

Ejemplo.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y defina

$$L((v_1, v_2)) := A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{T}^2$$

se verifica de inmediato que L es una transformación lineal de $\mathbb{T}^2$ en $\mathbb{T}^2$, más aún note que L no es inyectiva pues

$$T(2,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = L((0,1))$$

Pero $Ker(L) = \{(\infty, \infty)\}$, así este ejemplo prueba que el kernel de una transformación lineal tropical no está relacionado con el hecho que transformación sea inyectiva.

Aplicaciones (Problema de asignación)

Imaginemos una empresa que tiene n trabajadores y n puestos de trabajo y cada puesto debe ser asignado a uno de los trabajadores. Llamemos $x_{i,j}$ al coste de asignarle el puesto i al trabajador j. El mínimo coste óptimo total es:

$$\min_{\sigma \in S_n} \{x_{1,\sigma(1)} + x_{2,\sigma(2)} + \ldots + x_{n,\sigma(n)}\}$$

notemos que esta expresión corresponde a el determinante tropical de la matriz $Q = (x_{i,j})$, de aquí se desprende la siguiente **Proposición.-** Evaluar el determinante tropical resuelve el problema de asignación.

Aplicaciones (Caminos más cortos)

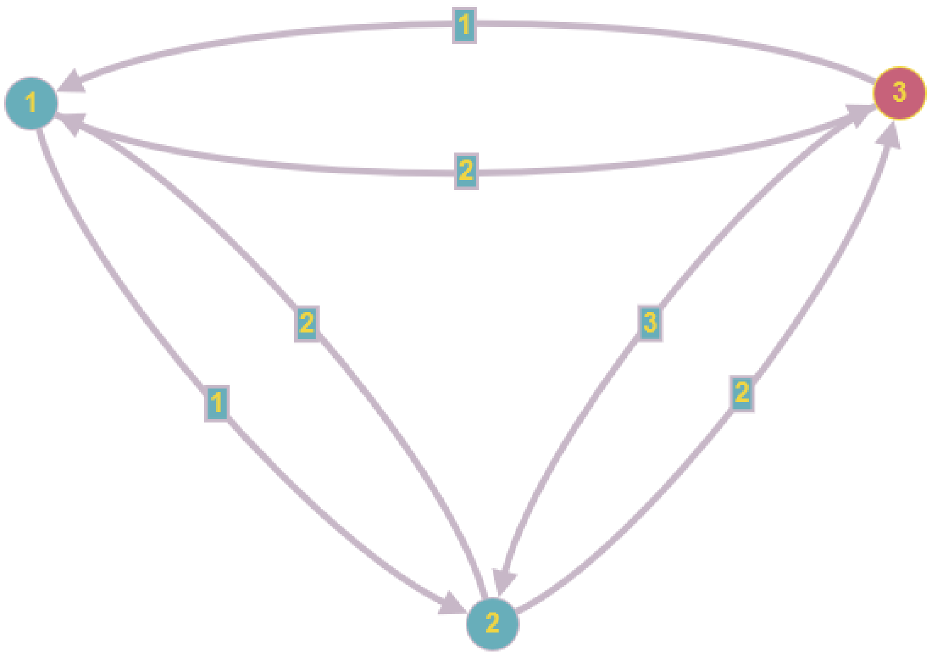
Fijemos un grafo G con n vértices y representemoslo mediante su matriz de distancias D_G, consideremos el producto tropical de D_G consigo misma $n-1$ veces, i.e

$$D_G^{\odot(n-1)} := D_G \odot \ldots \odot D_G$$

se tiene la siguiente
Proposición.- Sea G un grafo dirigido ponderado con n vertices con matriz de distancias D_G. El elemento de la matriz $D_G^{\odot(n-1)}$ en la fila i y columna j equivale a la longitud del camino más corto del vertice i al vertice j en G

Aplicaciones (Caminos más cortos)

Ejemplo.- Considere el siguiente grafo



Aplicaciones (Caminos más cortos)

Se tiene que

$$D_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

asi

$$D_G^{\odot(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Curvas tropicales

Procedemos a estudiar la geometria del semi-anillo tropical. [1]

Definicion

Sea $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funcion polinomial tropical. Expresemos a p como $p = \min\{f_1, ..., f_r\}$, donde cada f_j es una funcion lineal. Se define la hipersuperficie $V(p)$ como el conjunto de puntos en donde p alcanza el minimo en al menos dos de sus funciones lineales,

Curvas tropicales

Procedemos a estudiar la geometria del semi-anillo tropical. [1]

Definicion

Sea $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funcion polinomial tropical. Expresemos a p como $p = \min\{f_1, ..., f_r\}$, donde cada f_j es una funcion lineal. Se define la hipersuperficie $V(p)$ como el conjunto de puntos en donde p alcanza el minimo en al menos dos de sus funciones lineales, esto es,

$$V(p) := \{w \in \mathbb{R}^n : j \neq k : f_j(w) = f_k(w) = p(w)\}$$

Curvas tropicales: Ejemplos

Estudiemos algunos ejemplos para asimilar la definicion:

Curvas tropicales: Ejemplos

Estudiemos algunos ejemplos para asimilar la definicion:

Caso n=1

Considere la funcion polinomial:

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$$

Curvas tropicales: Ejemplos

Estudiemos algunos ejemplos para asimilar la definicion:

Caso n=1
Considere la funcion polinomial:

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$$

Si $b - a \leq c - b \leq d - c$, entonces

$$V(p) = \{b - a, c - b, d - c\}$$

Curvas tropicales: Ejemplos

En general, en el caso $n = 1$ geometricamente lo que se obtiene es una coleccion finita discreta de puntos en la recta real.

Por lo que, nos centramos en estudiar casos de dimension mayor, veamos lo que sucede en el caso $n = 2$. En este caso, como veremos, las hipersuperficies obtenidas son "curvas". De hecho, son gráficas planas.

Curvas tropicales: Ejemplos

Caso n=2

Considere la funcion polinomial:

$$p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

Curvas tropicales: Ejemplos

Caso n=2

Considere la funcion polinomial:

$$p(x,y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

En este caso se tiene:

$$V(p) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} a + x = b + y \leq c \\ a + x = c \leq b + y \\ b + y = c \leq a + x \end{array} \right\}$$

Curvas tropicales: Ejemplos

Caso n=2

Ahora, considere la funcion polinomial:

$$p(x, y) = x \odot y \oplus x \oplus y \oplus 0$$

Curvas tropicales: Ejemplos

Caso n=2

Ahora, considere la funcion polinomial:

$$p(x,y) = x \odot y \oplus x \oplus y \oplus 0$$

En este caso, tenemos que

$$V(p) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x+y = x \leq y, 0 & x = y \leq x+y, 0 \\ x+y = y \leq x, 0 & x = 0 \leq x+y, y \\ x+y = 0 \leq x, y & y = 0 \leq x+y, x \end{array} \right\}$$

Poligono de Newton

Como se observa, cuando nuestro polinomio tropical consiste de varios términos, en general, el número de casos comienza a incrementa para encontrar las curvas tropicales.

Poligono de Newton

Como se observa, cuando nuestro polinomio tropical consiste de varios términos, en general, el número de casos comienza a incrementa para encontrar las curvas tropicales.

Por lo que es conveniente introducir una nueva herramienta:

Definición

Sea $p(x, y)$ un polinomio en dos variables, en aritmética clásica o tropical. El **polígono de Newton** denotado $\mathrm{Newt}(p)$ se define como la envolvente convexa en $\mathbb{R}^2$ de todos los puntos (i, j) tales que $x^i y^j$ aparece en la expansión de $p(x, y)$

Polígono de Newton: Ejemplos

Ejemplo 1: Considere $p(x, y) = ax + by + c$, entonces nuestro polígono de Newton es un triángulo:
Ejemplo 2: Considere $p(x, y) = x \odot y \oplus x \oplus y \oplus 0$, entonces nuestro polígono de Newton es un cuadrado:

Subdivisión del polígono de Newton

Definición

Dado un polinomio $p(x, y)$ cuyos coeficientes no cero son $a_{i_1,j_1}, \ldots, a_{i_r,j_r}$ los cuales están asociados a las potencias $x^{i_1}y^{j_1}, \ldots, x^{i_r}y^{j_r}$, respectivamente.
Sea $\mathrm{Newt}(p)$ el polígono de Newton asociado a p, entonces definimos el poliedro de Newton como

$$\mathrm{Pol}(p) := \mathrm{ConvexHull}(\{(i, j, x) | (i, j) \in \mathrm{Newt}(p)), x \leq |a_{i,j}|\})$$

Proyectando las caras de este poliedro en las primeras dos coordenadas obtenemos la subdivisión del polígono de Newton asociada al polinomio p, $\mathrm{Sbd}(p)$.

Subdivisión del polígono de Newton: Ejemplos

Ejemplo:
Considere los siguientes dos polinomios:

$$p(x, y) = 5 + 5x + 5y + 4xy + 1x^2 + 1y^2$$

$$q(x, y) = 5 + 5x + 5y + 5xy + 1x^2 + 1y^2$$

¿Cómo se ven las subdivisones asociadas a estos polinomios?

Polígono de Newton y curvas tropicales

Proposición

La curva tropical $V(p)$ asociada a un polinomio tropical de dos variables p es el dual de el polinomio de Newton Newt(p) en sel siguiente sentido [2]:

- A cada vértice v de la curva tropical $V(p)$ le corresponde una cara $d(v)$ de la subdivisión del polígono de Newton $sbd(p)$.
- A cada arista e de la curva tropical $V(p)$ le corresponde una arista $d(e)$ de la subdivisión $sbd(p)$ tal que dichas aristas son perpendiculares.
- Si v es un extremo de una arista e, entonces la cara $d(v)$ contiene a la arista $d(e)$ como una de sus aristas.
- A cada vértice del poliedro de Newton Pol(p) le corresponde una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus V(p)$.

Referencias

E. Brugallé, I. Itenberg, G. Mikhalkin, and K. Shaw.
Brief introduction to tropical geometry.
arXiv preprint arXiv:1502.05950, 2015.

N. Kalinin.
The newton polygon of a planar singular curve and its subdivision.
Journal of Combinatorial Theory, Series A, 137:226–256, 2016.

A. LAFACE.
Introduction to tropical geometry.
2006.

D. Maclagan and B. Sturmfels.
Introduction to tropical geometry, volume 161.
American Mathematical Society, 2021.