Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m-coloreada

Hortensia Galeana Sánchez
Ma. Rocío Rojas Monroy
Guadalupe Gaytán Gómez

Marzo 20, 2013

Definiciones Básicas

Definición

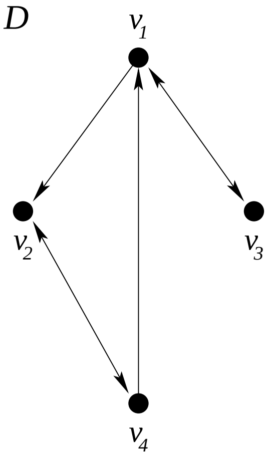
Una digráfica D *consiste de un conjunto finito no vacío de vértices, al cual denotaremos por* $V(D)$ *y de un conjunto de parejas ordenadas de vértices a cuyos elementos les llamaremos flechas y que denotaremos por* $F(D)$.

Definición

Si D *es una digráfica y* $v \in V(D)$. *El exgrado de* v, *denotado por* $\delta_D^+(v)$, *es el número de vértices adyacentes desde* v.

Definición

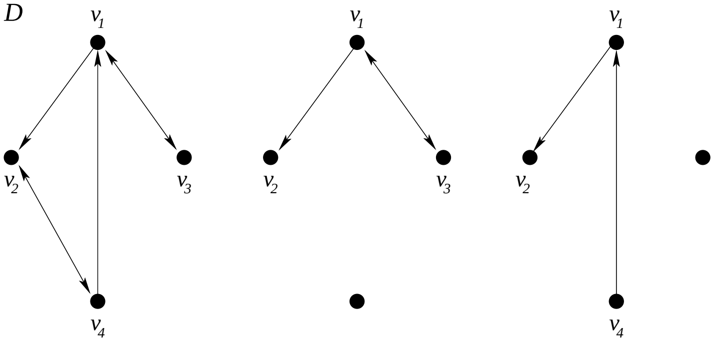
Si D *es una digráfica y* $v \in V(D)$. *El ingrado de* v, *denotado por* $\delta_D^-(v)$, *es el número de vértices adyacentes hacia* v.



Por ejemplo, $\delta_D^+(v_1) = 1$ y $\delta_D^-(v_1) = 2$.

Definición

Sea D una digráfica, D' es una subdigráfica de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Y D' es una subdigráfica generadora de D si $V(D') = V(D)$.



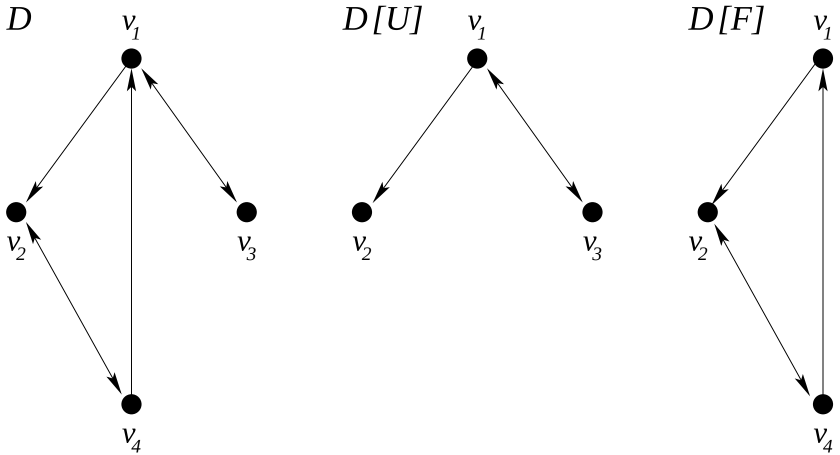
Subdigráficas generadoras de D.

Definiciones Básicas

Definición

Sea D una digráfica, si $U \subseteq V(D)$, definimos la subdigráfica de D inducida por U como la digráfica que tiene a U como conjunto de vértices y como conjunto de flechas a todas las flechas entre vértices de U y que pertenecen a D.
Denotaremos por $D[U]$ a la subdigráfica de D inducida por $U \subseteq V(D)$.

Definiciones Básicas



Subdigráficas inducidas por $U = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $F = \{v_1, v_2, v_4\}$.

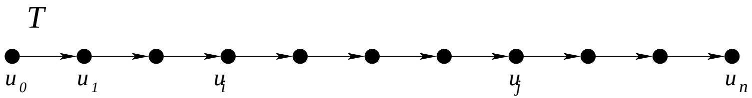
Definiciones Básicas

Definición

Una uv–trayectoria dirigida en una digráfica D es una sucesión de vértices distintos de la forma $(u = u_0, u_1, \ldots, u_n = v)$ que cumple que para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.

Notación

Sea $T = (u = u_0, u_1, \ldots, u_n = v)$ una uv–trayectoria dirigida en una digráfica D. Sean $1 \leq i < j \leq n$, denotamos por (u_i, T, u_j) a la $u_i u_j$–trayectoria dirigida contenida en T, es decir,
$(u_i, T, u_j) = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j)$.



Resultados Básicos

Los siguientes Teoremas son resultados básicos en Teoría de Digráficas que emplearemos en nuestros resultados.

Teorema

Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Todo $uv-$camino dirigido en D contiene una $uv-$trayectoria dirigida en D.

Teorema

Todo camino dirigido cerrado en una digráfica D contiene un ciclo dirigido.

Teorema

Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos dirigidos, entonces tiene al menos un vértice de exgrado cero.

Definición

Sea D una digráfica. Un subconjunto S de $V(D)$ será llamado independiente si para cualesquiera dos vértices de S no existe la uv-flecha ni la vu-flecha en D.

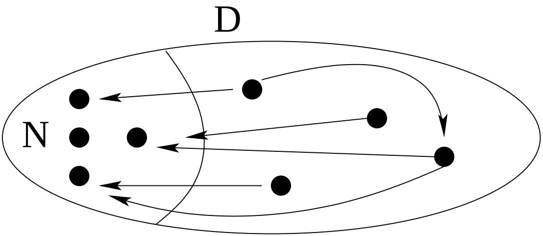
Definición

Sea D una digráfica. Un subconjunto S de $V(D)$ será llamado absorbente si para cada vértice v que no pertenece a S, existe una $vS-$flecha.

Núcleos

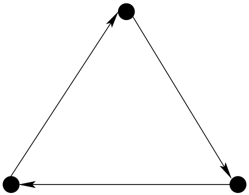
Definición

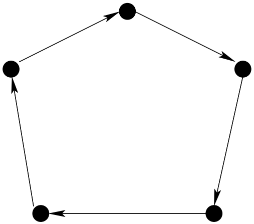
Sea D una digráfica. Un subconjunto N de $V(D)$ será llamado un núcleo de D si es un conjunto independiente y absorbente de D.



Núcleos

Nótese que no todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo los ciclos dirigidos de longitud impar no tienen núcleo.





Núcleos

Nosotras necesitaremos el siguiente Teorema debido a Berge-Duchet.

Teorema

Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene un núcleo.

Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas

Definición

Diremos que una digráfica D es m-coloreada si las flechas de D son coloreadas con m colores.

Definición

Una digráfica D es monocromática si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color.

Definición

Sea D una digráfica m-coloreada, una trayectoria dirigida monocromática en D es una trayectoria dirigida tal que todas sus flechas están coloreadas del mismo color.
Un ciclo dirigido es llamado casimonocromático si con a lo más una excepción todas sus flechas están coloreadas del mismo color.

Definición

Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto S de vértices de D será llamado independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cualesquiera dos vértices de S no existe una trayectoria dirigida monocromática entre ellos en D.

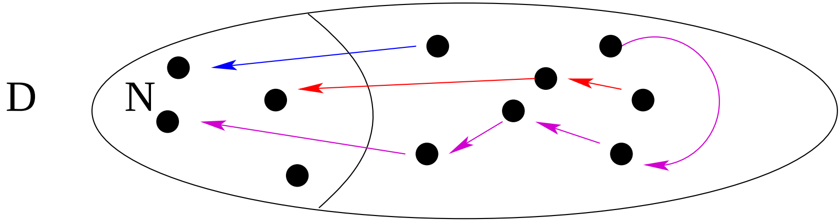
Definición

Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto S de vértices de D será llamado absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cada vértice x que no pertenece a S, existe una trayectoria dirigida monocromática de x a un vértice de S.

Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas

Definición

Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto N de vértices de D es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, si N es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas.



Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas

Nótese que el concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo ya que si a cualquier digráfica le asignamos un color distinto a sus flechas, entonces un conjunto de vértices es núcleo de la digráfica si y sólo si es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Definición

Sea D una digráfica m-coloreada, la cerradura de D, denotada por $\mathcal{C}(D)$, de define como la siguiente multidigráfica:

1. $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$,
2. $F(\mathcal{C}(D)) = F(D) \cup \{(u,v)$*con color* $i \mid$ *existe una* $uv-$*t. d. m. de color* i *en* $D\}$.

El siguiente Teorema muestra la relación entre núcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema

Sea D una digráfica m-coloreada, D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo.

Antecedentes

Sands, Sauer y Woodrow demuestran que una digráfica 2-coloreada sin trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En particular, ellos prueban que todo torneo 2-coloreado T tiene un vértice v tal que desde cualquier otro vértice $u \in V(T)$ existe una trayectoria dirigida monocromática hacia v.

También, plantean el siguiente problema: Sea T un torneo m-coloreado tal que no tiene ciclos dirigidos de longitud 3, 3-coloreados. ¿Debe T tener un vértice que satisfaga lo anterior?

Shen Minggang prueba que si en el problema anterior se pide además que no tenga subtorneos transitivos de orden 3, $3-$coloreados entonces existe tal vértice.

También, muestra que esto es lo mejor posible para $m \geq 5$.

1. Prueba que para $m \geq 5$ existe un torneo $m-$coloreado T tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático y T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
2. y para cada $m \geq 3$ existe un torneo $m-$coloreado T' tal que cada torneo transitivo de orden 3 es casimonocromático y T' no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

El caso $m = 3$ (si T es un torneo $3-$coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático, entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas) continua abierto.

H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy demuestran que el resultado planteado por Sands, Sauer y Woodrow no es válido para $m = 4$.

Ciclos Monocromáticos y Trayectorias Monocromáticas

El siguiente Teorema y los siguientes Lemas serán de utilidad para resolver el Teorema Principal.

Teorema (1)

Sea D una digráfica m-coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Si $C = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ es una sucesión de $n \geq 2$ vértices dos a dos distintos tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, T_i es alguna $u_i u_{i+1}$-trayectoria dirigida monocromática, entonces el conjunto de trayectorias $\{T_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ es monocromático, es decir las trayectorias T_i son dos a dos del mismo color. (Los índices de los vértices están tomados módulo n.)

Ciclos Monocromáticos y Trayectorias Monocromáticas

Lema

Sea D una digráfica m-coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Entonces no existe una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ tal que para cada i existe una $x_i x_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i-$trayectoria dirigida monocromática en D.

Lema

Sea D *una digráfica* $m-$*coloreada tal que todo ciclo dirigido en* D *es monocromático. Existe* $x_0 \in V(D)$ *tal que para cada* $z \in V(D) - \{x_0\}$ *si existe una* x_0z-*trayectoria dirigida monocromática contenida en* D*, entonces existe una* zx_0-*trayectoria dirigida monocromática contenida en* D*.*

Ciclos Monocromáticos y Trayectorias Monocromáticas

Teorema (2)

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que cada ciclo dirigido en D es monocromático, entonces D tiene un núcleo.

Para demostrar este Teorema probaremos que en la $\mathcal{C}(D)$ cada ciclo tiene al menos una flecha simétrica.

Sea $\mathcal{C}(D)$ la cerradura de la digráfica D. Supongamos por contradicción que existe un ciclo $C = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} = u_0)$ en $\mathcal{C}(D)$ tal que no tiene ninguna flecha simétrica.

Entonces en D existe una $u_i u_{i+1}-$trayectoria dirigida monocromática y no existe ninguna $u_{i+1} u_i-$trayectoria dirigida monocromática en D para $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, pero esto es una contradicción el Lema 2.

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.

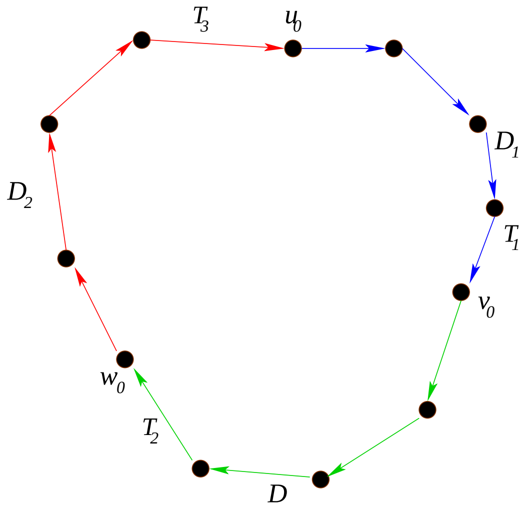
Definición

Si $C = (u_0, \ldots, u_k = v_0, \ldots, v_m = w_0, \ldots, w_n = u_0)$ es un ciclo dirigido. Decimos que C es una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3, $3-$coloreada si

1. $T_1 = (u_0, \ldots, u_k)$ *es una t.d.m. de color a en D_1,*
2. $T_2 = (v_0, \ldots, v_m)$ *es una t.d.m. de color b en D, y*
3. $T_3 = (w_0, \ldots, w_n)$ *es una t.d.m. de color c en D_2*

con $a \neq b$, $b \neq c$ y $a \neq c$.

Ciclos Monocromáticos y Trayectorias Monocromáticas

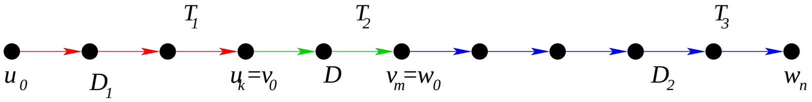


Definición

Si $P = (u_0, \ldots, u_k = v_0, \ldots, v_m = w_0, \ldots, w_n)$ *es una trayectoria dirigida. Decimos que* P *es una* (D_1, D, D_2) *subdivisión de* P_3*,* $3-$*coloreada si*

1. $T_1 = (u_0, \ldots, u_k)$ *es una t.d.m. de color* a *en* D_1*,*
2. $T_2 = (v_0, \ldots, v_m)$ *es una t.d.m. de color* b *en* D*, y*
3. $T_3 = (w_0, \ldots, w_n)$ *es una t.d.m. de color* c *en* D_2

con $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*.*



Teorema principal

Teorema (3)

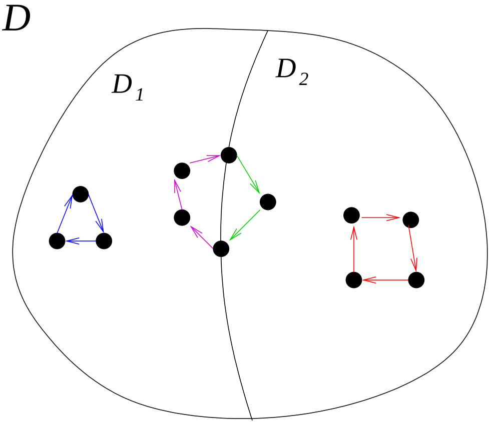
Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que:

1. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$;
2. *cada ciclo dirigido de D contenido en D_i es monocromático para $i \in \{1, 2\}$;*
3. *D no contiene (D_1, D, D_2) subdivisiones de C_3 $3-$coloreadas y*
4. *si (u, v, w, x) es una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 $3-$coloreada, entonces existe una trayectoria dirigida monocromática en D entre u y x.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Nota

Nótese que mientras en el Teorema 2 se pide que todo ciclo dirigido sea monocromático en el Teorema 3 puede haber ciclos no monocromáticos pues los ciclos monocromáticos sólo se piden en cada D_i para $i \in \{1, 2\}$.



Nota

Nótese que el Teorema 3 generaliza el Teorema de Sands, Sauer y Woodrow ya que:

1. Una digráfica $2-$coloreada es una digráfica $m-$coloreada para $m = 2$.
2. Una digráfica $2-$coloreada se puede dividir en 2 subdigráficas generadoras monocromáticas D_1 y D_2 tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.
3. Cada ciclo dirigido en D_i para $i = \{1, 2\}$ es monocromático pues cada D_i lo es.
4. D no contiene (D_1, D, D_2) subdivisiones de C_3 $3-$coloreadas pues en D no hay 3 colores.
5. Por la misma razón que en 4 D no contiene (D_1, D, D_2) subdivisiones de P_3 $3-$coloreadas.

Nota

Por lo tanto toda digráfica D, $2-$coloreada cumple las hipótesis de nuestro Teorema Principal y como la conclusión de los 2 Teoremas es la misma nuestro Teorema generaliaza el Teorema de Sands, Sauer y Woodrow.

Generalizando

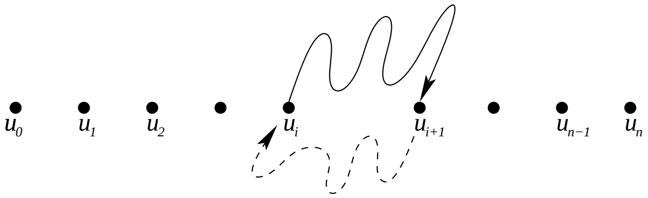
En la búsqueda de digráficas que satisfagan tener núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, hemos podido darnos cuenta que varios de nuestros Teoremas y Lemas pueden ser generalizados.

Definición

Sea D una digráfica m-coloreada. Un γ-ciclo en D es una sucesión de vértices distintos de D, $\gamma = (u_0, u_1, ..., u_{n-1}, u_n = u_0)$ tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$:

1. *Existe una $u_i u_{i+1}$-t.d.m. en D y*
2. *No existe $u_{i+1} u_i$-t.d.m. en D.*

(los índices de los vértices estan tomados $\mathrm{mod}\ n$.)



Los siguientes Lemas son acerca de digráficas que no contienen $\gamma-$ciclos y nos serán de gran utilidad en la demostración de nuestro Teorema Principal.

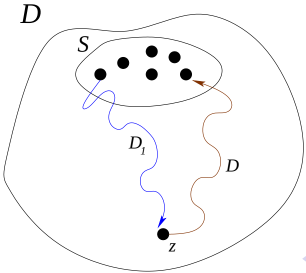
Lema (1)

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que no contiene $\gamma-$ciclos. Existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$ si existe una x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D, entonces existe una zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Seminúcleo por trayectorias monocromáticas $mod\ D_2$

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 que satisfacen las siguientes condiciones: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$.
Sea $S \subseteq V(D)$ diremos que S es un seminúcleo por t.d.m $mod\ D_2$ de D si:

1. S es independiente por t.d.m. y
2. para cada $z \in V(D) - S$, si existe una $Sz-$t.d.m. en $D - D_2 = D_1$, entonces existe una $zS-$t.d.m. en D.



Más Lemas

Lema (2)

Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$ y D_1 no contiene $\gamma-$ciclos. Entonces existe $x_0 \in V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas $mod\ D_2$ de D.

La digráfica $D_{\mathcal{S}}$

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$ y
2. D_1 no contiene $\gamma-$ciclos.

Sea

$$\mathcal{S} = \{\emptyset \neq S \subseteq V(D) \mid S \text{ es seminúcleo por t.d.m. } mod\ D_2 \text{ de } D\}.$$

Nótese que por el Lema 2, existe un seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas $mod\ D_2$ de D y así $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

La digráfica $D_{\mathcal{S}}$

Denotemos por $D_{\mathcal{S}}$ la digráfica definida como sigue:

1. $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ (es decir, por cada elemento de $\mathcal{S}$ ponemos un vértice en $D_{\mathcal{S}}$) y
2. $(S_1, S_2) \in F(D_{\mathcal{S}})$ si y sólo si para cada $s_1 \in S_1$ existe $s_2 \in S_2$ tal que $s_1 = s_2$ ó existe una $s_1 s_2-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna $s_2 S_1-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Lema (3)

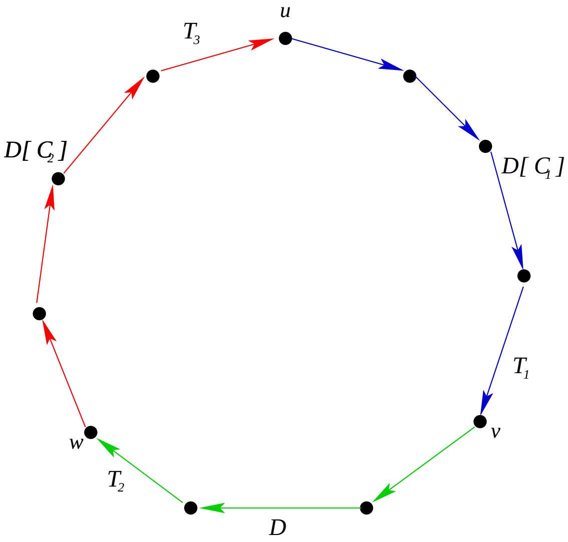
Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras de D, D_1 y D_2 tales que: $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$ y D_i no contiene $\gamma-$ciclos para $i \in \{1, 2\}$. Entonces, D_S es una digráfica acíclica.

Definición

Denotaremos por $\widehat{C_3}(u, v, w, u)$ *al camino dirigido cerrado* $C = (u = u_0, \ldots, u_k = v = v_0, \ldots, v_m = w = w_0, \ldots, w_n = u_0 = u)$ *que satisface:*

1. $T_1 = (u = u_0, \ldots, u_k = v)$ *es un c.d.m. de color* a *en* D_1*,*
2. $T_2 = (v = v_0, \ldots, v_m = w)$ *es un c.d.m. de color* b *en* D *y*
3. $T_3 = (w = w_0, \ldots, w_n = u)$ *es un c.d.m. de color* c *en* D_2

con $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*.*

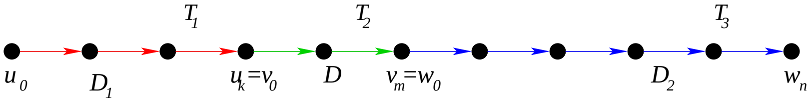

u
T_3
$D[C_2]$
$D[C_1]$
T_1
v
w
T_2
D

Definición

Denotaremos por $\widehat{P_3}(u, v, w, x)$ *al camino dirigido* $P = (u = u_0, \ldots, u_k = v = v_0, \ldots, v_m = w = w_0, \ldots, w_n = x)$ *que satisface:*

1. $T_1 = (u = u_0, \ldots, u_k = v)$ *es un c.d.m. de color* a *en* D_1*,*
2. $T_2 = (v = v_0, \ldots, v_m = w)$ *es un c.d.m. de color* b *en* D *y*
3. $T_3 = (w = w_0, \ldots, w_n = x)$ *es un c.d.m. de color* c *en* D_2

con $a \neq b$*,* $b \neq c$ *y* $a \neq c$*.*



Teorema Principal

Teorema (1)

Sea D una digráfica $m-$coloreada. Si existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de la digráfica D tales que:

1. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $colores(D_1) \cap colores(D_2) = \emptyset$;
2. *D_i no contiene $\gamma-$ciclos para $i \in \{1, 2\}$;*
3. *Si D contiene un $\widehat{C_3}(x_0, z, w, x_0)$, entonces existe una x_0w-t.d.m en D o existe una zx_0-t.d.m. en D;*
4. *Si D contiene un $\widehat{P_3}(u, z, w, x_0)$, entonces al menos una de las siguientes trayectorias dirigidas monocromáticas se tiene: $uw-$t.d.m en D, $wu-$t.d.m. en D, x_0u-t.d.m. en D, ux_0-t.d.m. en D, x_0w-t.d.m en D, $zu-$t.d.m en D, zx_0-t.d.m en D, x_0z-t.d.m. en D_1.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Esbozo de la demostración

Considérese la digráfica D_S de la digráfica D. Ya que D_S es una digráfica finita y por el Lema 3 no contiene ciclos dirigidos se sigue que D_S contiene al menos un vértice de exgrado cero. Sea $S \in V(D_S)$ tal que $\delta^{+}_{D_S}(S) = 0$.

Afirmamos que S es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D.

Supongamos por contradicción que S no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D. Ya que $S \in V(D_S)$ tenemos que S es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Esbozo de la demostración

Sea

$$X = \{z \in V(D) \mid \text{No existe } zS-\text{trayectoria monocromática en } D\}.$$

Se sigue de nuestra suposición que $X \neq \emptyset$. Ya que $D[X]$ es una subdigráfica inducida de D, tenemos que $D[X]$ satisface las hipótesis del Teorema y en particular la subdigráfica de D_1 en $D[X]$ satisface las hipótesis del Lema 2. Así, se sigue que existe $x_0 \in X$ tal que para cada $z \in X - \{x_0\}$ se cumple que si existe x_0z-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1 entonces existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1.

Sea

$T = \{z \in S \mid$ No existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática en $D_2\}$.

Por la definición de T tenemos que para cada $z \in (S - T)$ existe zx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2.

Esbozo de la demostración

Afirmación 1**.** $T \cup \{x_0\}$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Afirmación 2**.** Supongamos que existe una $(T \cup \{x_0\})z-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D_1. Probaremos que existe una $z(T \cup \{x_0\})-$trayectoria dirigida monocromática contenida en D.

Esbozo de la demostración

Concluimos que $T \cup \{x_0\} \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $T \cup \{x_0\} \in V(D_{\mathcal{S}})$.

Tenemos que $(S, T \cup \{x_0\}) \in F(D_{\mathcal{S}})$ ya que $T \subseteq S$, $x_0 \in X$ y para cada $s \in S$ tal que $s \notin T$ existe una sx_0-trayectoria dirigida monocromática contenida en D_2 y no existe ninguna x_0S-trayectoria dirigida monocromática contenida en D. Pero esto contradice el hecho de que $\delta^+_{D_{\mathcal{S}}}(S) = 0$.

Por lo tanto S es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en D y el Teorema queda demostrado.

Observación

El Teorema 1 puede ser aplicado a todos aquellas digráficas que no contienen γ-ciclos.
Asi, generalizaciones de muchos resultados previos son obtenidos como consecuencia directa del Teorema 1.

Teorema (H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, G. Gaytán-Gómez)

Sea D una digráfica $m-$coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Entonces, D no contiene γ-ciclos.

Definición

Una digráfica D es casitransitiva si para $\{u, v, w\} \subseteq V(D)$ tales que $\{(u, v),\ (v, w)\} \subseteq F(D)$ implica que $(u, w) \in F(D)$ o $(w, u) \in F(D)$.

Definición

Sea D una digráfica y $u \in V(D)$ denotaremos por:

$$F^+(u) = \{(u, v) \in F(D) \mid v \in V(D)\}.$$

$F^+(u)$ es monocromático si todos sus elementos tienen el mismo color.

Teorema (H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, B. Zavala)

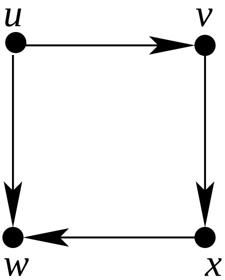
Sea D una digráfica m-coloreada casitransitiva tal que para cada $u \in V(D)$, $F^{+}(u)$ es monocromático y D no contiene C_3 3-coloreados. Entonces D no contiene γ-ciclos.

Definición

Decimos que D es 3-casitransitiva si para cada $u, v \in V(D)$ tal que existe una uv-trayectoria dirigida de longitud 3 se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

Denotamos por T_4 a la siguiente digráfica:

1. $V(T_4) = \{u, v, w, x\}$ y
2. $F(T_4) = \{(u, v), (v, w), (w, x), (u, x)\}$.



Teorema (H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, B. Zavala)

Sea D una digráfica m-coloreada 3-casitransitiva tal que para cada $u \in V(D)$, $F^{+}(u)$ es monocromático. Si cada C_3, C_4 y T_4 contenido en D es casimonocromático, entonces D no contiene γ-ciclos.

Teorema (H. Galeana-Sánchez)

Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático. Entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.

Ejemplos

Teorema (H. Galeana-Sánchez)

Sea D una digráfica $m-$coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u,v) de algún torneo T $m-$coloreado (es decir, $D \cong T-(u,v)$). Si cada ciclo dirigido contenido en D de longitud a lo más 4 es casimonocromático, entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.

Ejemplos

Definición

Una digráfica D *es un torneo bipartito si existe una bipartición* $\{V_1, V_2\}$ *de* $V(D)$ *tal que toda flecha de* D *tiene un extremo en* V_1 *y el otro en* V_2*, y entre cualquier vértice de* V_1 *y cualquier vértice de* V_2 *existe una y sólo una flecha.*

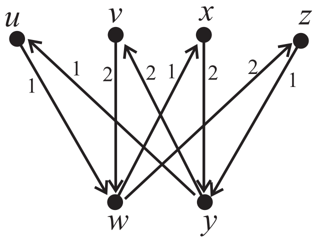
Ejemplos

Definición

$\widetilde{T}_6$ *es el torneo bipartito definido como sigue:*

1. $V(\widetilde{T}_6) = \{u, v, w, x, y, z\}$,
2. $F(\widetilde{T}_6) = \{(u, w), (v, w), (w, x), (w, z), (x, y), (y, u), (y, v), (z, y)\}$

con $\{(u, w), (w, x), (y, u), (z, y)\}$ *de color* 1 *y* $\{(v, w), (w, z), (x, y), (y, v)\}$ *de color* 2.



Teorema (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy)

Sea T un torneo bipartito m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 4 es casimonocromático, cada ciclo dirigido de longitud 6 es monocromático y T no contiene subtorneos isomorfos a $\widetilde{T}_6$. Entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.

Ejemplos

Definición

$\xi(v)$ denota el conjunto de colores asignados a las flechas que tienen a v como extremo final.

Teorema (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy)

Sea T un torneo 3-coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud 3 en D es casimonocromático y para cada $v \in V(T)$ se tiene que $\mid \xi(v) \mid \leq 2$, entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.

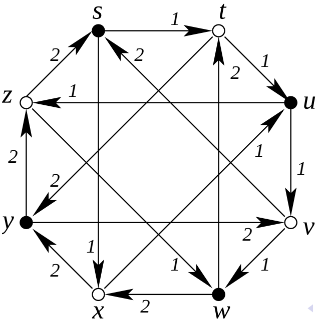
Ejemplos

Definición

Definimos $\overrightarrow{T}_8$ *como la siguiente digráfica:*

1. $V(\overrightarrow{T}_8) = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$,
2. $F(\overrightarrow{T}_8) =$

con $\{(s,t), (s,x), (t,u), (u,v), (u,z), (v,w), (x,u)\}$ *de color* 1 *y todas las demás flechas en* $\overrightarrow{T}_8$ *de color* 2.



Ejemplos

Teorema (H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy)

Sea T un torneo bipartito m-coloreado tal que, cada C_4 es casimonocromático, cada T_4 es casimonocromático y T no contiene subdigráficas inducidas isomorfas a $\overrightarrow{T}_8$. Entonces T no contiene $\gamma-$ciclos.

Ejemplos

Teorema (H. Galeana-Sánchez, J.J. García-Ruvalcaba)

Sea D una digráfica $m-$coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u, v) de algún torneo T $m-$coloreado. Si D no contiene C_3 ni T_3 $3-$coloreados, entonces D no contiene $\gamma-$ciclos.

¡GRACIAS!