

Cinvestav
Departamento de Matemáticas

Suerte!!! Examen

Primer Concurso de Matemáticas GUILLERMO MORENO.

Octubre 22-26, 2007

Resuelve las siguientes preguntas individualmente¹ sin ayuda de nadie. Envía tus respuestas al Departamento de Matemáticas del Cinvestav (a más tardar el viernes) ya sea

- *Por Fax al (55) 5061-3876 con atención al concurso Guillermo Moreno.*
- *Por e-mail a gm2007@math.cinvestav.mx*
- *En persona en el Departamento de Matemáticas del Cinvestav.*
- *Preguntas o aclaraciones al gm2007@math.cinvestav.mx*

1. Decida si el número

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

es racional.

2. Determine todas las funciones continuas reales de una variable real f tales que para cada pareja de números reales (x, y) se tiene

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}.$$

3. Calcule la integral triple:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1 + u^2 + v^2 + w^2)^{-2} du dv dw.$$

¹Confiamos en ti!

4. Para una matriz A de tipo $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Para k un entero entre 1 y n , sea $\sigma_k(A)$ definida como la k -función simétrica elemental evaluada en los valores propios,

$$\sigma_k(A) = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}.$$

Donde la suma corre sobre todas las permutaciones (i_1, \dots, i_k) tales que $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Por ejemplo σ_1 es la traza y σ_n es el determinante. Demuestra que para toda k se tiene

$$\sigma_k(AB) = \sigma_k(BA).$$

5. Un rectángulo R esta adoquinado por un numero finito de rectángulos P_1, \dots, P_n de modo que para cada P_i al menos uno de sus lados tiene por longitud un numero entero. Demuestre que R tiene al menos un lado con longitud entera.