Distancia de Hausdorff

Notación. $\mathcal{K} := \{X \subset \mathbb{C} \colon X \text{ compacto y no vacío}\}$.

Definición (distancia de Hausdorff). Para $X, Y \in \mathcal{K}$,

$$d^*(X,Y) := \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(x,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} |x-y|;$$
$$d_H(X,Y) := \max(d^*(X,Y), d^*(Y,X)).$$

La función d_H se llama *distancia de Hausdorff*.

1. Ejemplo. Para dos circulos (discos cerrados) X, Y calcular $d_H(X,Y)$.

2. Ejemplo. Para dos circunferencias X, Y calcular $d_H(X,Y)$.

3. Para $X, Y \in \mathcal{K}$, $\quad d^*(X,Y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X \subset Y$.

4. Para $X, Y \in \mathcal{K}$, $\quad d_H(X,Y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = Y$.

5. Para $X, Y \in \mathcal{K}$, $\quad d^*(X,Y) \leqslant d^*(X,Z) + d_H(Z,Y)$.

6. Desigualdad triangular para la distancia de Hausdorff.

$$d_H(X,Y) \leqslant d_H(X,Z) + d_H(Z,Y) \qquad (X,Y,Z \in \mathcal{K}).$$

7. Sean $X, Y \in \mathcal{K}$, $Y = \bigcup_{i\in I} Z_i$, donde $Z_i \in \mathcal{K}$. Entonces

$$d^*(X,Y) = \inf_{i\in I} d^*(X,Z_i), \qquad d^*(Y,X) = \sup_{i\in I} d^*(Z_i,X), \qquad d_H(X,Y) \leqslant \sup_{i\in I} d_H(X,Z_i).$$

8. Consideremos la sequencia de los conjuntos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$X_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \frac{1}{n+1} \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant \frac{1}{n},\ 0 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 1 \right\}.$$

Probar que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sequencia de Cauchy en $\mathcal{K}$, i.e. $\rho(X_n, X_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Calcular

$$Y_n = \operatorname{clos}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k\right), \qquad Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n. \tag{1}$$

Mostrar que $d_H(X_n, Z) \to 0$.

9. Lema. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}$. Definimos Y_n y Z mediante las formulas (1). Entonces $Y_n \in \mathcal{K}$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $Z \in \mathcal{K}$.

10. Teorema. El espacio métrico $(\mathcal{K}, d_H)$ es completo.