Espacios de Hardy

1. Notación (monomios, polynomios y polynomios de Laurent). Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, denotemos con e_n $(n \in \mathbb{Z})$ la función

$$e_n(t) := t^n \quad (t \in \mathbb{T}).$$

Polinomios son combinaciones lineales del sistema $\{e_n\}_{n \geqslant 0}$; *polinomios de Laurent* son combinaciones lineales del sistema $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\mathcal{P} := \operatorname{lin}\{e_n\}_{n \geqslant 0}, \qquad \mathcal{LP} := \operatorname{lin}\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

2. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$.

3. Notación. El operador $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ se define mediante de

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}\, x)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e_n(t),$$

donde la seria converge en el sentido de $L^2(\mathbb{T})$.

4. Escribir la fórmula para el operador inverso a $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$.

5. Escribir la forma coordenada de los operadores M_{e_1} y $M_{e_{-1}}$, i.e. escribir las fórmulas para los operadores $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{-1}\, M_{e_1}\, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{-1}\, M_{e_{-1}}\, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$.

Definición (espacios de Hardy sobre $\mathbb{T}$). Para $p \in [1, +\infty]$,

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{T}) &:= \{f \in L^p(\mathbb{T}) \colon \int_{\mathbb{T}} f(t) t^k \, d\mu_{\mathbb{T}}(t) = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots\}\} \\ &= \{f \in L^p(\mathbb{T}) \colon \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{ki\theta} \, d\theta = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots\}\}. \end{aligned}$$

En lugar de $H^p(\mathbb{T})$ escribimos también H^p.

6. H^2 es el complemento orthogonal de $\{e_n\}_{n<0}$. Por lo tanto, H^2 es un subespacio cerrado en $L^2(\mathbb{T})$.

Definición (proyección de Szegö). Definamos el operador $P^+ \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ como la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ en $H^2(\mathbb{T})$.

7. Escribir la forma coordenada de P^+. En otras palabras, encontrar la fórmula para el operador $P_+ = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{-1}\, P^+\, \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$.

Operador singular de Cauchy-Szegö. El operador $S\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ se define como

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{f(z)\, dz}{z - t},$$

donde la integral se comprende en el sentido de valor principal. Se sabe que $Se_n = e_n$ para $n \geqslant 0$ y $Se_n = -e_n$ para $n < 0$.

8. Expresar P^+ a través de S y al revés.

9. Teorema (¿cuándo H^2 es un subespacio invariante de M_a?). Para $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $M_a H^2 \subset H^2$;

(b) $a \in H^\infty(\mathbb{T})$.

10. $H^\infty(\mathbb{T})$ es una C^*-álgebra.

11. Si ν es una medida de Borel en $\mathbb{T}$ y $\int_\mathbb{T} e_n(t)\nu(t) = 0$ para todos $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\nu = 0$.

12. Si $a \in L^1(\mathbb{T})$ y $\int_\mathbb{T} a(t) e_n(t) d\mu_\mathbb{T}(t) = 0$ para todos $n \in \mathbb{Z}$, entonces $a = 0$ (c.t.p.).

13. Sea f una función de la clase H^1 con valores reales: $f(t) \in \mathbb{R}$ c.t.p. Entonces f es una constante real.

14. Si $f \in H^1$ y $f^* \in H^1$, entonces f es una constante compleja.

Teorema (sin prueba). Sean ν una medida positiva de Borel en $\mathbb{T}$ y X un subespacio cerrado de $L^2(\nu)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $e_1 X = X$;

(b) existe un conjunto de Borel $E \subset \mathbb{T}$ tal que

$$X = L^2_E(\nu) = \{f \in L^2(\nu)\colon f(t) = 0 \ \forall t \notin E\}.$$

Definición (función interna). La función $a \in H^\infty$ se llama *función interna* si $|a(t)| = 1$ c.t.p.

Teorema de Beurling (sin prueba). Sea X un subespacio cerrado de $H^2(\mathbb{T})$, $X \neq \{0\}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $P^+ M_{e_1} X \subset X$;

(b) $X = \varphi H^2$ para alguna función interna φ.

15. Teorema de F. y M. Riesz. Sea $f \in H^2$ tal que $f \neq 0$, i.e. $\mu\{t \in \mathbb{T}\colon f(t) \neq 0\} > 0$. Entonces $\mu\{t \in \mathbb{T}\colon f(t) = 0\} = 0$.

16. Corolario del teorema de F. y M. Riesz. Sean $f, g \in H^2$ tales que $fg = 0$. Entonces $f = 0$ ó $g = 0$.