Operador de Hankel

Definición (espacio $H^2_-(\mathbb{T})$). $H^2_-(\mathbb{T}) := \{a \in L^2(\mathbb{T})\colon \langle a, e_n\rangle = 0\ \forall n \geqslant 0\}$.

1. $H^2_-(\mathbb{T})$ la imagen del proyector $P^- := I - P^+$ y el complemento ortogonal de $H^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$.

Definición (operador de flip). $J\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad (Jf) = \frac{1}{t} f(1/t)$.

2. Hallar la forma coordenada de J, i.e. el operador $\mathfrak{F}_{\mathbb{Z}}\, J\, \mathfrak{F}_{\mathbb{Z}}$.

3. J es un isomorfismo isométrico.

4. $J(H^2(\mathbb{T})) = H^2_-(\mathbb{T})$ y al revés.

Definición (operador de Hankel). Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. El *operador de Hankel* con símbolo a, $H_a\colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ se define mediante

$$H_a := P^+ M_a (I - P^+) J.$$

Nota. Algunos autores usan el término *operador de Hankel* para otro operador:

$$H^2(\mathbb{T}) \to H^2_-(\mathbb{T}), \qquad f \mapsto (I - P^+) M_a f \qquad (f \in H^2(\mathbb{T})).$$

5. $\|H_a\| \leqslant \|a\|_\infty$.

6. Hallar la matriz de H_a en la base $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$.

7. Hallar H_a^*.

8. Expresar $T_{ab} - T_a T_b$ a través de operadores de Hankel.

9. Sea a un polinomio de Laurent. Entonces H_a es finitodimensional.

10. Sea $a \in C(\mathbb{T})$. Entonces el operador H_a es compacto.