Solución a Problemas de tipo Dirichlet usando Análisis Armónico

Marysol Navarro Burruel

UNISON

17 Abril, 2013

Resumen

- Problemas Clásicos de tipo Dirichlet para ecuaciones armónicas.
  - Disco.
  - semi-espacio superior y la bola en $\mathbb{R}^n$
  - Dominios más generales
- Solución Problemas de tipo Dirichlet para ecuaciones elípticas.
  - Problema L^p-Dirichlet y BMO-Dirichlet: Método de la medida armónica.
  - Planteamiento de los problemas y solubilidad.
- Perturbación de operadores.

Teorema

Sea D el disco de radio a. f una función $C(\partial D)$, entonces la solución al problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u = f & \text{en } \partial D \end{cases}$$

está dada por

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ &= (P_r * f)(\theta), \end{aligned}$$

para $0 \leq r < a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solución fundamental de la Ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n$

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & n = 2 \\ \frac{C}{n(n-2)|x|^{n-2}} & n \leq 3 \end{cases}$$

Solución a la ecuación de Poisson en $\mathbb{R}^n$

Teorema

Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy,$$

entonces $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ y $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$.

Solución al Problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $\partial\Omega$ de clase C^1.
- $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Solución: Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$.

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial v}(y) - u(y)\frac{\partial \phi}{\partial v}(y-x) \right) dS(y) - \int_{\Omega} \phi(y-x)\Delta u(y) dy.$$

- Función Correctora: $\phi^x = \phi^x(y)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta\phi^x(y) = 0 & y \in \Omega \\ \phi^x(y) = \phi(y-x) & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- Función de Green

$$G(x,y) = \phi(y-x) - \phi^x(y), \quad x, y \in \bar{\Omega} \quad x \neq y$$

- De las fórmulas de Green

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y) - \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)dy$$

Representación mediante la función de Green

Teorema

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado. $\partial\Omega$ de clase C^1. Si $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{en } \Omega, \quad f \in C(\Omega) \\ u(x) = g(x) & \text{en } \partial\Omega, \quad g \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

entonces

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial v}(x,y)dS(y) - \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)dy$$

- Núcleo de Poisson para $\mathbb{R}^{n+1}_+$

$$k(x,y) = \frac{2t}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^{n+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \quad y \in \partial \mathbb{R}^{n+1}_+$$

- Núcleo de Poisson para la bola $B(0,r)$

$$k(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x-y|^{n}}, \qquad x \in B(0,r) \quad y \in \partial B(0,r).$$

Solución al problema de Dirichlet en dominios más generales

Método de Perrón de funciones subarmónicas.

- Función barrera: $Q_z \in C(\bar{\Omega})$ es una barrera en z si
  - Q_z es subarmónica en Ω.
  - $Q_z(z) = 0$ y $Q_z(x) < 0$ si $x \in \bar{\Omega} - \{z\}$.
- Punto regular.
  - $z \in \partial\Omega$ es regular si existe una función barrera z.
  - Ω tiene frontera regular si cada $z \in \partial\Omega$ es regular.

Método de Perrón

Teorema

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. El Problema de Dirichlet tiene solución para Ω si y sólo si Ω tiene frontera regular.

El problema de Dirichlet. Ecuaciones de tipo elíptico

Un modo de generalizar al operador de Laplace es considerando operadores dados formalmente por

$$Lu = \operatorname{div}\left(A(x)\nabla u(x)\right)$$

. donde $A(x) = (a_{ij}(x))$ es una matriz simétrica, de elementos medibles y acotados, cumpliendo una condición de la forma

$$\lambda_1|\zeta|^2 \leq \langle A(x)\zeta, \zeta\rangle \leq \lambda_2|\zeta|^2$$

En este caso la existencia de soluciones al problema

$$\begin{cases} Lu = g & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

usa herramientas de otro tipo.

Soluciones de tipo elíptico

Una solución para el problema

$$\begin{cases} Lu = g & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

será $u \in W^{1,2}(\Omega)$ de modo que para toda $\phi \in C_c^\infty(\omega)$ se tiene $\phi u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y además se deberá cumplir

$$\int_\Omega Lu(x)\phi(x)dx = \int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla\phi(x)dx = \int_\Omega g(x)\phi(x)dx$$

Teorema de Lax-Milgram.

Resp: sentido de la traza.

Para

$$\begin{cases} Lu = g & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

¿Qué sentido tiene $u = f$ en $\partial\Omega$

Teorema

Supongamos que Ω es un conjunto acotado y con frontera C^1. Entonces existe un operador lineal acotado $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ acotado, tal que

- $Tu = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$.
- $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con la constante depediendo sólo de p y Ω.

Llamamos a Tu como la traza de u en $\partial\Omega$.

Si tenemos el problema

$$\begin{cases} Lu = g & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Esto significa que $u = f$ en $\partial\Omega$ en el sentido de la traza. Así que f es la traza de alguna función $W^{1,2}$, digamos w. Pero entonces $\tilde{u} = u - w$ pertenece a $W_0^{1,2}$, y es una solución débil del problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{g} & \text{en } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\tilde{g} := g - Lw$.

Planteamiento del Problema L^p-Dirichlet

Decimos que el problema L^p-Dirichlet, $1 < p < \infty$, asociado al operador elíptico L tiene solución si la solución al problema clásico

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite la estimación

$$\|Nu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$$

donde $Nu(p) = sup\{|u(x)| : x \in \Gamma(p)\}$, con $\Gamma(p)$ una región cónica anclada en $p \in \partial\Omega$.

En este caso, por brevedad se dirá que D_p se cumple para L.

Definición del espacio $BMO(\partial\Omega)$

Se define el $BMO(\partial\Omega)$ como el espacio de funciones (módulo constantes) en $L_{1(loc)}(\partial\Omega)$ tales que

$$\sup_{\Delta} \frac{1}{\Delta} \int_B |f(Q) - f_\Delta|^2 \, dQ \leq C$$

donde Δ denota una bola centrada en Q intersección con $\partial\Omega$, y

$$f_\Delta = \frac{1}{B} \int_B f(Q) dQ$$

Se denota por $\|f\|_{BMO}$ al supremo de la estimación anterior.

Planteamiento del problema *BMO* Dirichlet

Decimos que el problema *BMO*-Dirichlet asociado al operador elíptico L tiene solución si la solución al problema clásico

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite la estimación

$$\int_{T(\Delta)} |\nabla u(x)|^2 \delta(x) dx \leq C \|f\|_{BMO} |\Delta|$$

donde $T(\Delta(Q)) = \{Y \in \Omega : |Y - Q| \leq \text{diam}(\Delta)\}$ y $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

... ¿ y el Análisis Armónico?

Método de la Medida Armónica para resolver los problemas planteados anteriormente.

La medida armónica asociada a L es una familia de medidas ω^x con $x \in \Omega$, definidas en la frontera de Ω, que representan a a la solución del problema clásico de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

en el sentido que

$$u(x) = \int_\Omega f(Q) d\omega^x(Q),$$

por el Teorema de Representación de Riez aplicado a $f \longmapsto u(x)$.

Denotaremos por σ a la medida superficial.

La clase RH^q

Nótese que cuando $\omega^x \ll \sigma$, si u es la solución al problema clásico de Dirichlet, y poniendo $k = d\omega/d\sigma$, se tendrá:

$$u(x) \leq \int_{\partial\Omega} |f(Q)| k(x, Q) d\sigma(Q).$$

Por técnicas típicas del Anális de Fourier moderno se puede probar que para establecer la desigualdad

$$\|Nu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$$

se cumple si y sólo si k cumple la siguiente desigualdad reversa de Hölder

$$\left(\frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta k^q d\sigma \right)^{1/q} \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta k d\sigma$$

con $1/p + 1/q = 1$

En conclusión para el dato en L^p ...

- El problema L^p Dirichlet quedará resuelto si se prueba si se prueba que $k \in RH^q(\partial\Omega)$. Donde esta clase de funciones se define con la anterior desigualdad reversa de Hölder.
- En otras palabras, se ha reducido el problema L^p-Dirichlet a obtener una propiedad local de peso del núcleo de Poisson generalizado $d\omega^x/d\sigma$.

Una propiedad de pesos en $RH^q(\partial\Omega)$

Sea ω^x la medida armónica asociada al operador elíptico L. Decimos que ω^x está en $A_\infty(d\sigma)$ si para toda ϵ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\omega^x(E)}{\omega^x(\Delta)} \leq \delta \quad \text{implica} \quad \frac{\sigma(E)}{\sigma(\Delta)} < \epsilon$$

Teorema (Muckenhoupt, Coiffman-Fefferman (1972))

Son equivalentes:

- $\omega^x \in A_\infty d(\sigma)$ uniformemente en $x \in \Omega$.
- $\sigma \in A_\infty(d\omega^x)$ uniformemente en $x \in \Omega$.
- Existe $1 < q < \infty$ tal que $d\omega^x/d\sigma \in RH^q(\partial\Omega)$ uniformemente en $x \in \Omega$.

Planteamiento para operadores más generales

Se requiere dar respuesta a las siguientes preguntas: Dar condiciones sobre la discrepancia de los coeficientes de dos operadores L_1 y L_2 de manera que ...

- Cuando D_p se cumpla para L_1 para cierta $1 < p < \infty$, se cumpla D_q para L_2, con $1 < q < \infty$ no necesariamente igual a p.
- Cuando D_p se cumpla para L_1 y cierta $1 < p < \infty$, también se cumpla para L_2 y la misma p.
- Cuando D_p se cumpla para L_1 y toda $1 < p < \infty$, también se cumpla D_p para L_2, y toda $1 < p < \infty$.

Perturbación de Operadores

Consideremos dos operadores $L_1 u_1(x) = \operatorname{div}(A_1(x)\nabla u)$ y $L_2 u_2(x) = \operatorname{div}(A_2(x)\nabla u)$ y defínase la discrepancia

$$A(x) = \sup_{y \in B(x)} |A_1(y) - A_2(y)|, \quad \text{donde} \quad B(x) = B_{\delta(x)/2}(x).$$

para $Q \in \partial\Omega$. Sea $\Delta_r(Q) = B_r(Q) \cup \partial\Omega$ y $T_r(Q) = B_r(Q) \cup \Omega$. Defínase

$$h(r, Q) = \left[\frac{1}{\Delta_r(Q)} \int_{T_r(Q)} \frac{A^2(x)}{\delta(x)} dx \right]^{1/2}$$

Teorema (Dahlberg(1986), Fefferman-Kenig-Pipher(1991), Escauriaza (1996))

- Supóngase que $\omega_1 \in A_\infty(d\sigma)$ y que

$$\sup_{0<r<r_0, Q\in\partial\Omega} h(r, Q) < \infty$$

  Entonces $w_2 \in A_\infty(d\sigma)$

- Suponiendo que $\limsup_{r\to 0} \sup_{Q\in\partial\Omega} h(r, Q) = 0$,
  - Si $k_1(d\omega_1/d\sigma) \in RH^p(\partial\Omega)$ para cierta $1 < p < \infty$, entonces $k_2 = (d\omega_2/d\sigma) \in RH^p(\partial\Omega)$ para la misma p.
  - Si $k_1(d\omega_1/d\sigma) \in RH^p(\partial\Omega)$ para toda $1 < p < \infty$, entonces $k_2 = (d\omega_2/d\sigma) \in RH^p(\partial\Omega)$ para toda $1 < p < \infty$.

A_∞ y el problema BMO-Dirichlet

Más recientemente se ha hallado una conección entre la propiedad $\omega \in A_\infty(d\sigma)$ y el poder resolver el problema BMO-Dirichlet

Teorema (Dindos-Kenig-Dipher (2011))

Dado un operador elíptico L, con medida armónica ω_L, tendremos que $\omega_L \in A_\infty(d\sigma)$ si y sólo si se cumple

$$\int_{T(\Delta)} |\nabla u(x)|^2 \, \delta(x) dx \leq C\sigma(\Delta) \|f\|_{BMO}^2$$

para cualquier solución $Lu = 0$ con dato en la frontera continuo f.