Álgebras C^* y sus propiedades principales

Repasamos rápidamente (sin demostraciones) las propiedades básicas de C^*-álgebras.

Definición (involución en álgebra compleja). Sea A una álgebra sobre el campo $\mathbb{C}$. El mapeo ${}^*\colon A \to A$ se llama *involución* en A, si se cumplen las siguientes condiciones:

$$(a+b)^* = a^* + b^*, \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (a^*)^* = a.$$

Definición (*-homomorfismo). Sean A y B álgebras sobre $\mathbb{C}$ con involuciones. El mapeo $f\colon A \to B$ se llama **-homomorfismo* si es lineal, multiplicativo y cumple la siguiente condición:

$$f(a^*) = f(a)^* \qquad \forall a \in A.$$

Definición (C^*-álgebra). Álgebra de Banach A con involución * se llama C^**-álgebra*, si $\|a^* a\| = \|a\|^2$ para todos $a \in A$.

1. Teorema (Gelfand-Naimark). Sea A una C^*-álgebra. Entonces existe un espacio de Hilbert H y un *-homomorfismo isométrico $\varphi\colon A \to \mathcal{B}(H)$. Si A es separable, entonces H puede ser eligido separable también.

En toda esta sección supongamos que A es una C^*-álgebra con unidad 1_A tal que $\|1_A\| = 1$.

Definición. El elemento $a \in A$ se llama:

- *autoadjunto*, si $a^* = a$;
- *normal*, si $a^* a = a a^*$;
- *unitario*, si $a^* a = a a^* = 1_A$;
- *positivo*, si $a^* = a$ y $\mathrm{sp}(a) \subset [0, +\infty)$.

2. Sea $a \in A$ un elemento autoadjunto. Entonces $\mathrm{r}(a) = \|a\|$.

3. Teorema (*-homomorfismos entre C^*-álgebras son funciones cortas). Sean A, B álgebras C^* y $\varphi\colon A \to B$ un *-homomorfismo. Entonces

$$\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\| \qquad \forall a \in A.$$

4. Teorema (los espectros de elementos autoadjuntos son reales). Si $a \in A$ y $a = a^*$, entonces $\mathrm{sp}(a) \subset \mathbb{R}$.

5. Teorema (Gelfand). Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\Gamma\colon A \to C(\mathcal{M}(A))$ es un *-isomorfismo isométrico.

6. Definición. Sea A una C^*-álgebra. Para $X \subset A$, denotemos con $C^*(X)$ el álgebra C^* generada por X.

7. Proposición. Sea $a \in A$ un elemento normal. Entonces $\mathrm{r}(a) = \|a\|$.

8. Teorema. Sea B una C^*-subálgebra de A tal que $1_A \in B$. Entonces para todo $b \in B$, $\mathrm{sp}_B(b) = \mathrm{sp}_A(b)$.

9. Teorema. Sea $u \in A$ un elemento unitario tal que $\mathrm{sp}(u) \neq \mathbb{T}$. Entonces existe $a \in A$ autoadjunto tal que $u = \exp(ia)$. (La condición $\|1_A - u\| < 2$ es suficiente para $\mathrm{sp}(a) \neq \mathbb{T}$.)

10. Teorema (cálculo funcional continuo). Sea $a \in A$ un elemento normal. Entonces existe único *-homomorfismo unital $\varphi\colon C(\mathrm{sp}(a)) \to A$ tal que

$$\varphi(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}|_{\mathrm{sp}(a)}) = a.$$

Además, φ es isométrico y $\mathrm{im}(\varphi) = C^*(a, 1_A)$. Para cualquiera función $f \in C(\mathrm{sp}(a))$, el elemento $\varphi(f)$ se denota con $f(a)$.

11. Teorema (mapeo de los espectros). Sean a un elemento normal y $f \in C(\mathrm{sp}(a))$. Entonces $\mathrm{sp}(f(a)) = f(\mathrm{sp}(a))$. Además, si $g \in C(\mathrm{sp}(f(a)))$, entonces $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.