Álgebras de Banach. Grupo de elementos invertibles

En esta sección, A es un álgebra de Banach unital. El elemento unidad denotemos con 1_A o con e.

Definición (el grupo de los elementos invertibles). El conjunto de los elementos invertibles de A de denota con $\operatorname{Inv}(A)$ o $G(A)$ o A^{-1}. Es fácil de ver que $\operatorname{Inv}(A)$ es un grupo.

1. Serie de von Neumann. Sea $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$. Entonces $e - a \in \operatorname{Inv}(A)$ y

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n,$$

Encontrar estimaciones superiores para $\|(e-a)^{-1}\|$ y $\|(e-a)^{-1} - e\|$ en términos de $\|a\|$.

2. Para a invertible y b suficiente cerca de a, b es invertible también. Encontrar estimaciones superiores para $\|b^{-1}\|$ y $\|b^{-1} - a^{-1}\|$ en términos de $\|a^{-1}\|$ y $\|b - a\|$.

3. $\operatorname{Inv}(A)$ es un conjunto abierto en A.

4. El mapeo $\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(A) \to \operatorname{Inv}(A)$, $a \mapsto a^{-1}$, es un homeomorfismo.

5. Escribir la definición de la derivada de Fréchet.

6. Mostrar que inv es diferenciable (en el sentido de Fréchet) en cualquier punto de $\operatorname{Inv}(A)$. Calcular su derivada en cualquier punto $a_0 \in \operatorname{Inv}(A)$.

Definición (la función exponente). Para $a \in A$,

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

7. Para $a, b \in A$ tales que $ab = ba$, $\quad \exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$.

8. $\exp(A) \subset \operatorname{Inv}(A)$.

Definición (componente principal de $\operatorname{Inv}(A)$). El *componente principal* $\operatorname{Inv}_1(A)$ del grupo $\operatorname{Inv}(A)$ es su componente conexo conteniendo e.

9. Lema. Sean X, Y subconjuntos conexos de A. Entonces $XY := \{xy\colon x \in X,\ y \in Y\}$ también es un subconjunto conexo de A.

10. Teorema (descripción de $\operatorname{Inv}_1(A)$). $\operatorname{Inv}_1(A)$ es un subgrupo normal de $\operatorname{Inv}(A)$. Este subgrupo es generado por el conjunto $\exp(A)$, i.e.

$$\operatorname{Inv}_1(A) = \{\exp(a_1) \cdot \ldots \cdot \exp(a_k)\colon k \in \{0, 1, 2, \ldots\},\ a_1, \ldots, a_k \in A\}.$$

11. Si A es conmutativa, entonces $\operatorname{Inv}_1(A) = \exp(A)$.