Principio General Local para Álgebras C^*

García Salas Alma Itzel

Departamento de Matemáticas
CINVESTAV

Contenido

Haces C^*.

Definición

*Si E, T son espacios topológicos y $p : E \to T$ es una función suprayectiva, la terna $\xi = (p, E, T)$ es llamada un **haz**.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] \\ T \end{tikzcd}$$

Haces C^*.

Definición

Si E, T son espacios topológicos y $p : E \to T$ es una función suprayectiva, la terna $\xi = (p, E, T)$ es llamada un haz.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] \\ T \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

- $\xi(t) = p^{-1}(t)$ se llama la fibra sobre el punto $t \in T$.
- Si $V \subset T$ abierto, la función $\sigma : V \to E$ tal que $p(\sigma(t)) = t$ es una sección local. Si $V = T$ la sección se llama global.
- $\Gamma(\xi)$ denota el conjunto de todas las secciones globales continuas de ξ.

Sea $E \vee E = \{(x, y) \in E \times E : p(x) = p(y)\}$.

Definición

El haz $\xi = (p, E, T)$ es un haz C^* si cada fibra $\xi(t)$ tiene estructura de álgebra C^* y

1. *las funciones*

$$\begin{aligned} E \vee E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x + y \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{C} \times E &\to E \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E &\to E \\ x &\mapsto x^* \end{aligned}$$

   son continuas,

2. *los conjuntos*

$$U_V(\sigma, \varepsilon) = \{x \in E : p(x) \in V \quad y \quad \|x - \sigma(p(x))\| < \varepsilon\}$$

   forman una base de conjuntos abiertos en el espacio E.

- Si $V = T$,
$$U(\sigma, \varepsilon) = U_T(\sigma, \varepsilon)$$
es llamada una vecindad tubular de la sección σ de radio ε.
- Para cada $a \in \Gamma(\xi)$, el conjunto
$$V(a, \varepsilon) = \{t \in T : \|a(t)\| < \varepsilon\}$$
es abierto en T.
- Si cada $\xi(t)$ tiene identidad $e(t)$ y la sección $e : t \mapsto e(t)$ es continua, el haz C^* es un haz con identidad.

Álgebra C^* definida por un haz.

Dado $\xi = (p, E, T)$ un haz C^*, el conjunto $\Gamma^b(\xi)$ de todas las secciones continuas acotadas σ de ξ con operaciones puntuales y la norma

$$\|\sigma\| = \sup_{t \in T} \|\sigma(t)\|$$

es un álgebra C^* y es llamada el álgebra C^* definida por ξ.

Lema

El álgebra $\Gamma^b(\xi)$ es un $C^b(T)-$módulo.

Lema

Si T es un espacio cuasi-compacto, entonces $\Gamma^b(\xi) = \Gamma(\xi)$ y $C^b(T) = C(T)$.

Teorema (Teorema de Stone-Weierstrass)

Sea $\xi = (p, E, T)$ *un haz* C^* *sobre un espacio cuasi-compacto y cuasi-completamente regular* T*. Sea* $\mathcal{A}$ *un* $C(T)-$*submódulo cerrado de* $\Gamma(\xi)$ *y tal que, para cada* $t \in T$*, el conjunto* $\mathcal{A}(t) = \{a(t) : a \in \mathcal{A}\}$ *es denso en la fibra* $\xi(t) = p^{-1}(t)$*. Entonces* $\mathcal{A} = \Gamma(\xi)$*.*

Teorema (Teorema de Stone-Weierstrass)

Sea $\xi = (p, E, T)$ un haz C^* sobre un espacio cuasi-compacto y cuasi-completamente regular T. Sea $\mathcal{A}$ un $C(T)-$submódulo cerrado de $\Gamma(\xi)$ y tal que, para cada $t \in T$, el conjunto $\mathcal{A}(t) = \{a(t) : a \in \mathcal{A}\}$ es denso en la fibra $\xi(t) = p^{-1}(t)$. Entonces $\mathcal{A} = \Gamma(\xi)$.

Demostración

Sea $\sigma \in \Gamma(\xi)$ y $\varepsilon > 0$.
P.D. Existe $a \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|\sigma - a\| = \sup_{t \in T} \|\sigma(t) - a(t)\| < \varepsilon.$$

Teorema (Teorema de Stone-Weierstrass)

Sea $\xi = (p, E, T)$ un haz C^* sobre un espacio cuasi-compacto y cuasi-completamente regular T. Sea $\mathcal{A}$ un $C(T)-$submódulo cerrado de $\Gamma(\xi)$ y tal que, para cada $t \in T$, el conjunto $\mathcal{A}(t) = \{a(t) : a \in \mathcal{A}\}$ es denso en la fibra $\xi(t) = p^{-1}(t)$. Entonces $\mathcal{A} = \Gamma(\xi)$.

Demostración

Sea $\sigma \in \Gamma(\xi)$ y $\varepsilon > 0$.
P.D. Existe $a \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|\sigma - a\| = \sup_{t \in T} \|\sigma(t) - a(t)\| < \varepsilon.$$

- *Para cada $t_0 \in T$ existe $a_{t_0} \in \mathcal{A}$ tal que $\|\sigma(t_0) - a_{t_0}(t_0)\| < \varepsilon$.*

Teorema (Teorema de Stone-Weierstrass)

Sea $\xi = (p, E, T)$ un haz C^* sobre un espacio cuasi-compacto y cuasi-completamente regular T. Sea $\mathcal{A}$ un $C(T)-$submódulo cerrado de $\Gamma(\xi)$ y tal que, para cada $t \in T$, el conjunto $\mathcal{A}(t) = \{a(t) : a \in \mathcal{A}\}$ es denso en la fibra $\xi(t) = p^{-1}(t)$. Entonces $\mathcal{A} = \Gamma(\xi)$.

Demostración

Sea $\sigma \in \Gamma(\xi)$ y $\varepsilon > 0$.
P.D. Existe $a \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|\sigma - a\| = \sup_{t \in T} \|\sigma(t) - a(t)\| < \varepsilon.$$

- *Para cada $t_0 \in T$ existe $a_{t_0} \in \mathcal{A}$ tal que $\|\sigma(t_0) - a_{t_0}(t_0)\| < \varepsilon$.*
- *$V'_{t_0} = V(\sigma - a_{t_0}, \varepsilon) = \{t \in T : \|\sigma(t) - a_{t_0}(t)\| < \varepsilon\}$ es abierto en T y contiene al punto t_0.*

- $f_{t_0} : T \to [0,1]$ *función continua en* T *tal que* $f_{t_0}(t_0) = 1$ *y* $f_{t_0}|_{T \setminus V'_{t_0}} \equiv 0$.

- $f_{t_0} : T \to [0,1]$ *función continua en* T *tal que* $f_{t_0}(t_0) = 1$ *y* $f_{t_0}|_{T \setminus V'_{t_0}} \equiv 0$.
- $V_{t_0} = \{t \in T : f_{t_0}(t) > 0\}$ *es abierto, contiene a* t_0 *y el sistema* $\{V_t\}_{t \in T}$ *es una cubierta abierta de* T.

- $f_{t_0} : T \to [0,1]$ *función continua en* T *tal que* $f_{t_0}(t_0) = 1$ *y* $f_{t_0}|_{T \setminus V'_{t_0}} \equiv 0$.
- $V_{t_0} = \{t \in T : f_{t_0}(t) > 0\}$ *es abierto, contiene a* t_0 *y el sistema* $\{V_t\}_{t \in T}$ *es una cubierta abierta de* T.
- *Sea* $\{V_{t_k}\}_{k=1}^{n}$ *una subcubierta finita.*

- $f_{t_0} : T \to [0,1]$ *función continua en* T *tal que* $f_{t_0}(t_0) = 1$ *y* $f_{t_0}|_{T \setminus V'_{t_0}} \equiv 0$.
- $V_{t_0} = \{t \in T : f_{t_0}(t) > 0\}$ *es abierto, contiene a* t_0 *y el sistema* $\{V_t\}_{t \in T}$ *es una cubierta abierta de* T.
- *Sea* $\{V_{t_k}\}_{k=1}^{n}$ *una subcubierta finita.*
- $\psi_k : T \to [0,1]$

$$\psi_k = \frac{f_{t_k}}{\sum_{j=1}^{n} f_{t_j}}$$

es función continua, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \psi_k = 1$ *y* $\|\psi_k(t)\sigma(t) - \psi_k(t)a_{t_k}(t)\| < \psi_{t_k}\varepsilon$.

- $f_{t_0} : T \to [0,1]$ *función continua en* T *tal que* $f_{t_0}(t_0) = 1$ *y* $f_{t_0}|_{T \setminus V'_{t_0}} \equiv 0$.
- $V_{t_0} = \{t \in T : f_{t_0}(t) > 0\}$ *es abierto, contiene a* t_0 *y el sistema* $\{V_t\}_{t \in T}$ *es una cubierta abierta de* T.
- *Sea* $\{V_{t_k}\}_{k=1}^{n}$ *una subcubierta finita.*
- $\psi_k : T \to [0,1]$

$$\psi_k = \frac{f_{t_k}}{\sum_{j=1}^{n} f_{t_j}}$$

es función continua, $\sum_{k=0}^{n} \psi_k = 1$ *y* $\|\psi_k(t)\sigma(t) - \psi_k(t)a_{t_k}(t)\| < \psi_{t_k}\varepsilon$.

- $a = \sum_{k=0}^{n} \psi_k a_{t_k}$ *es un elemento de* $\mathcal{A}$ *y* $\|\sigma - a\| < \varepsilon$.

Haz C^* definido por un Álgebra C^*.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea $J_T = \{J(t) : t \in T\}$ un sistema de ideales bilaterales cerrados de $\mathcal{A}$ parametrizado por un conjunto T.
Para cada $t \in T$ sea $\mathcal{A}(t) = \frac{\mathcal{A}}{J(t)}$ y consideremos

$$E = \sqcup_{t \in T} \mathcal{A}(t)$$

la unión disjunta de las álgebras $\mathcal{A}(t)$. La partición de E genera la proyección

$$\begin{aligned} p : &E \to T \\ &x(t) \mapsto t \end{aligned}$$

con $p^{-1}(t) = \mathcal{A}(t)$.

Dotando de topologías adecuadas a E y T:

- Cada $a \in \mathcal{A}$ genera la sección $\tilde{a} : T \to E$ dada por $\tilde{a}(t) = a(t)$.
- Sea $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{a} : a \in \mathcal{A}\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ y $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ se introducimos el conjunto

$$U(\tilde{a}, \varepsilon) = \{x \in E : \|x - \tilde{a}(p(x))\| < \varepsilon\}.$$

- Dotamos a E con la topología cuya sub-base consiste de los $U(\tilde{a}, \varepsilon)$.
- Dotamos a T con la topología cociente: la topología más fuerte bajo la cual la proyección p es continua.

Lema

1. *La función $p : E \to T$ es abierta.*
2. *La topología en T coincide con la topología más débil bajo la cual las secciones $\tilde{a} \in \tilde{A}$ son continuas.*
3. *Una sub-base de la topología en T está dada por el sistema de conjuntos*
$$V(\tilde{a}, \varepsilon) = \{t \in T : \|\tilde{a}(t)\| < \varepsilon\}.$$

La topología de T es llamada topología haz$-^*$.

Lema

1. *La función $p : E \to T$ es abierta.*
2. *La topología en T coincide con la topología más débil bajo la cual las secciones $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ son continuas.*
3. *Una sub-base de la topología en T está dada por el sistema de conjuntos*
$$V(\tilde{a}, \varepsilon) = \{t \in T : \|\tilde{a}(t)\| < \varepsilon\}.$$

La topología de T es llamada topología haz$-^*$.

Proposición

La terna $\xi = (p, E, T)$ es un haz C^*.

$\xi = (p, E, T)$ se llama el haz C^* definido por el álgebra C^* $\mathcal{A}$ y el sistema de ideales J_T

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, $J_T = \{J(t) : t \in T\}$ un sistema de sus ideales bilaterales cerrados, $\xi = (p, E, T)$ el haz C^* definido por $\mathcal{A}$ y J_T y sea $\Gamma^b(\xi)$ el álgebra C^* definida por el haz ξ. Entonces la función

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} :& \mathcal{A} \to \Gamma^b(\xi) \\ & a \to \tilde{a} \end{aligned}$$

es un morfismo de álgebras C^* tal que

1. *$ker\ \tilde{\pi} = \bigcap_{t \in T} J(t)$.*
2. *$Im\ \tilde{\pi} = \tilde{\mathcal{A}}$.*

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, $J_T = \{J(t) : t \in T\}$ un sistema de sus ideales bilaterales cerrados, $\xi = (p, E, T)$ el haz C^* definido por $\mathcal{A}$ y J_T y sea $\Gamma^b(\xi)$ el álgebra C^* definida por el haz ξ. Entonces la función

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} :& \mathcal{A} \to \Gamma^b(\xi) \\ & a \to \tilde{a} \end{aligned}$$

es un morfismo de álgebras C^* tal que

1. *ker* $\tilde{\pi} = \bigcap_{t \in T} J(t)$.
2. *Im* $\tilde{\pi} = \tilde{\mathcal{A}}$.

Demostración

- $\tilde{\pi}(a) = \tilde{a} = 0 \Leftrightarrow a(t) = 0, \ \ \forall t \in T \Leftrightarrow a \in J(t), \ \ \forall t \in T \Leftrightarrow a \in \cap_{t \in T} J(t)$.
- *Por definición de $\tilde{\mathcal{A}}$, se tiene Im $\tilde{\pi} = \tilde{\mathcal{A}}$*

Principio General Local

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y J_T un sistema de ideales bilaterales. Diremos que los elementos $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ son localmente equivalentes en $t \in T$ ($a_1 \sim^t a_2$) si y sólo si $a_1 - a_2 \in J(t)$. Las proyecciones $\pi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}(t)$ identifican elementos localmente equivalentes en t y el álgebra $\mathcal{A}(t)$ es llamada el álgebra local en t. Dado $a \in \mathcal{A}$, el elemento $\pi_t(a) = a(t)$ será llamado el representante local de a en $\mathcal{A}(t)$.

Principio Local de Douglas-Varela.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad e y sea Z su subálgebra C^* conmutativa que contiene a e. Denotemos por T el conjunto compacto de ideales maximales de Z.

- $Z \cong C(T)$.
- J_t denota el ideal maximal de Z que corresponde al punto $t \in T$.
- $J(t) = \mathcal{A} \cdot J_t$ es el ideal bilateral cerrado generado por J_t en el álgebra $\mathcal{A}$.
- $J_T = \{J(t) : t \in T\}$.

Proposición

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

Proposición

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

Demostración

- *Sea P un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ y π la representación irreducible de $\mathcal{A}$ con ker $\pi = P$.*

Proposición

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

Demostración

- *Sea P un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ y π la representación irreducible de $\mathcal{A}$ con ker $\pi = P$.*
- $\mathbb{C} \cdot I \subset \pi(Z) \subset \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$.

Proposición

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

Demostración

- *Sea P un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ y π la representación irreducible de $\mathcal{A}$ con ker $\pi = P$.*
- $\mathbb{C} \cdot I \subset \pi(Z) \subset \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$.
- $\mathbb{C} \cong \pi(Z) = \frac{(Z+P)}{P} \cong \frac{Z}{Z \cap P} \Rightarrow Z \cap P$ *es un ideal maximal de Z.*

Proposición

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

Demostración

- *Sea P un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ y π la representación irreducible de $\mathcal{A}$ con* ker $\pi = P$.
- $\mathbb{C} \cdot I \subset \pi(Z) \subset \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$.
- $\mathbb{C} \cong \pi(Z) = \frac{(Z+P)}{P} \cong \frac{Z}{Z \cap P} \Rightarrow Z \cap P$ *es un ideal maximal de* Z.
- $Z \cap P = J_t \Rightarrow J(t) \subset P$.

Proposición

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

Demostración

- *Sea P un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ y π la representación irreducible de $\mathcal{A}$ con* $\ker \pi = P$.
- $\mathbb{C} \cdot I \subset \pi(Z) \subset \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot I$.
- $\mathbb{C} \cong \pi(Z) = \frac{(Z+P)}{P} \cong \frac{Z}{Z \cap P} \Rightarrow Z \cap P$ *es un ideal maximal de* Z.
- $Z \cap P = J_t \Rightarrow J(t) \subset P$.
- $J(t) = \bigcap_{J(t) \subset Q, Q \text{ prim.}} Q$

Proposición

$$\bigcap_{t\in T} J(t) = \{0\}.$$

Demostración

- *Sea P un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ y π la representación irreducible de $\mathcal{A}$ con* $\ker \pi = P$.
- $\mathbb{C}\cdot I \subset \pi(Z) \subset \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\cdot I$.
- $\mathbb{C} \cong \pi(Z) = \frac{(Z+P)}{P} \cong \frac{Z}{Z\cap P} \Rightarrow Z\cap P$ *es un ideal maximal de* Z.
- $Z\cap P = J_t \Rightarrow J(t) \subset P$.
- $J(t) = \bigcap_{J(t)\subset Q, Q \text{ prim.}} Q$
- $\{0\} \subset \bigcap_{t\in T} J(t) \subset \bigcap_{Q \text{ prim.}} Q = \{0\} \Rightarrow \bigcap_{t\in T} J(t) = \{0\}$.

Consideremos el haz C^* definido por $\mathcal{A}$ y el sistema de ideales J_T, $\xi = (p, E, T)$.
El espacio T tiene dos topologías naturales:

1. la topología haz$-^*$ dada por ξ.
2. la topología del espacio compacto de ideales maximales de Z, la topología de Jacobson.

Consideremos el haz C^* definido por $\mathcal{A}$ y el sistema de ideales $J_T, \xi = (p, E, T)$.
El espacio T tiene dos topologías naturales:

1. la topología haz$-^*$ dada por ξ.
2. la topología del espacio compacto de ideales maximales de Z, la topología de Jacobson.

Lema

La topología haz$-^*$ y la topología de Jacobson coinciden en el espacio T.

Teorema (Principio Local de Douglas-Varela)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad, Z su subálgebra conmutativa con la misma identidad, T el conjunto compacto de ideales maximales del álgebra Z y sea J_T como antes. Entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es $*-$isomorfa e isométrica a $\Gamma(\xi)$.

Teorema (Principio Local de Douglas-Varela)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad, Z su subálgebra conmutativa con la misma identidad, T el conjunto compacto de ideales maximales del álgebra Z y sea J_T como antes. Entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es $*-$isomorfa e isométrica a $\Gamma(\xi)$.

Demostración

- $\bigcap_{t \in T} J(t) = 0$

Teorema (Principio Local de Douglas-Varela)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad, Z su subálgebra conmutativa con la misma identidad, T el conjunto compacto de ideales maximales del álgebra Z y sea J_T como antes. Entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es $*-$isomorfa e isométrica a $\Gamma(\xi)$.

Demostración

- $\bigcap_{t \in T} J(t) = 0$
- *$\mathcal{A}$ es $*-$isomorfa e isométrica al álgebra C^* $\tilde{\mathcal{A}}$, en particular $\tilde{\mathcal{A}}$ es cerrada.*

Teorema (Principio Local de Douglas-Varela)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad, Z su subálgebra conmutativa con la misma identidad, T el conjunto compacto de ideales maximales del álgebra Z y sea J_T como antes. Entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es $*-$isomorfa e isométrica a $\Gamma(\xi)$.

Demostración

- $\bigcap_{t \in T} J(t) = 0$
- $\mathcal{A}$ *es* $*-$*isomorfa e isométrica al álgebra* C^* $\tilde{\mathcal{A}}$, *en particular* $\tilde{\mathcal{A}}$ *es cerrada.*
- *para* $b(t) \in C(T)$ *y* $\tilde{e} = e(t)$ *la identidad en* $\tilde{\mathcal{A}}$, $b\tilde{e} = \tilde{b} \in \tilde{Z}$

- *para toda* $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$,

$$b\tilde{a} = b\tilde{e}\tilde{a} = \tilde{b}\tilde{a} = \tilde{ba} \in \tilde{\mathcal{A}}$$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ *es un* $C(T)-$*módulo*

- *para toda* $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$,

$$b\tilde{a} = b\tilde{e}\tilde{a} = \tilde{b}\tilde{a} = \tilde{ba} \in \tilde{\mathcal{A}}$$

  $\Rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ *es un* $C(T)-$*módulo*
- *por el Teorema de Stone-Weierstrass*

$$\mathcal{A} \cong \tilde{\mathcal{A}} \cong \Gamma(\xi)$$

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad, Z una subálgebra conmutativa con la misma identidad, T el conjunto compacto de ideales maximales de Z y $\xi = (p, E, T)$ el haz C^* definido por $\mathcal{A}$ y J_T. Para cada punto $t \in T$ y cada representación irreducible $\pi \in \widehat{\mathcal{A}(t)}$ se introduce la representación irreducible

$$\rho_\pi : a \mapsto a(t) \mapsto \pi(a(t))$$

del álgebra $\mathcal{A}$.
Entonces la función $\pi \mapsto \rho_\pi$ es una biyección entre $\bigcup_{t\in T} \widehat{\mathcal{A}(t)}$ y $\widehat{\mathcal{A}}$.

Demostración

Inyectividad:

- *Sean* $t_1, t_2 \in T$ *distintos y* π_1, π_2 *representaciones irreducibles de* $\mathcal{A}(t_1)$ *y* $\mathcal{A}(t_2)$ *respectivamente.*
- *Sea* $a \in \mathcal{A}$ *tal que* $\pi_1(a(t_1)) \neq 0$ *y* $b(t) \in C(T)$ *con* $b(t_1) = 1$ *y* $b(t_2) = 0$, $ba \in \mathcal{A}$.
- $$\rho_{\pi_1}(ba) = \pi_1(b(t_1)a(t_1)) \neq 0,$$ $$\rho_{\pi_1}(ba) = \pi_2(b(t_2)a(t_2)) = 0.$$
- ρ_{π_1} *y* ρ_{π_2} *no pueden ser equivalentes.*

Suprayectividad:

- *Sea* $\rho \in \widehat{\mathcal{A}}$ *y* $P = \ker\ \rho$.
- $P \cap Z = J_{t_0} \Rightarrow J(t_0) \subset P$.
- $\pi : a(t_{t_0}) \mapsto a \mapsto \rho(a)$ *es una función bien definida pues*

  $$a(t_0) = b(t_0) \Rightarrow a \sim^t b \Rightarrow a - b \in J(t) \subset P \Rightarrow \rho(a - b) = 0 \Rightarrow \rho(a)$$

- $\pi \in \widehat{\mathcal{A}(t_0)}$ *y* $\rho = \rho_\pi$.

GRACIAS